Trigonométrie (fonctions sinus et cosinus)

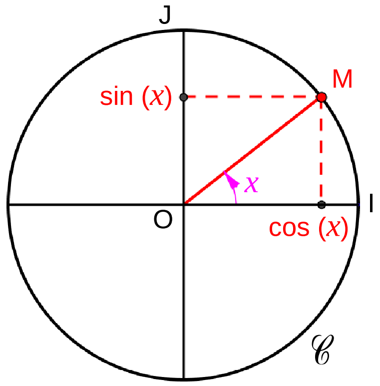
<u>rappel :</u>

Soit $\mathscr{C}$ le cercle trigonométrique de centre O et (O, I, J) un repère orthonormé direct du plan.

Soit M l'image d'un réel x sur le cercle trigonométrique $\mathscr{C}$.

Le cosinus de x, noté cos x est l'abscisse de M

Le sinus de x, noté sin x est l'ordonnée de M



Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$ **et** $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$

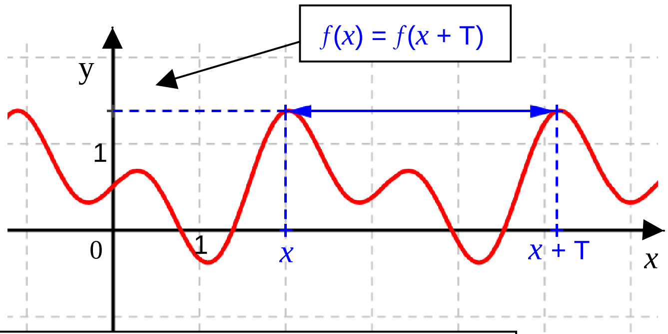
I) Notions de parité et de périodicité d'une fonction :

a) périodicité d'une fonction :

Soit une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.

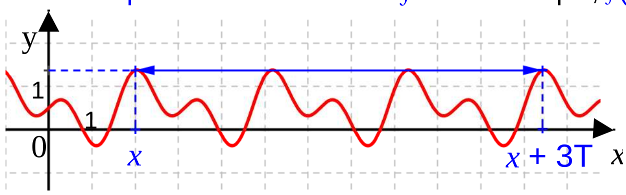
On dit que la fonction f est périodique de période T s'il existe un nombre réel strictement positif T tel que, pour tout réel x, on ait :

$f(x + \mathrm{T}) = f(x)$



Soit un entier naturel non nul k.

Tous les nombres k x T sont des périodes de la fonction f ! Par exemple, $f(x) = f(x + 3\mathrm{T})$

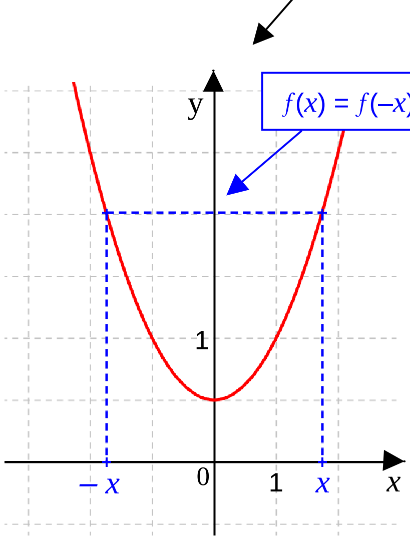


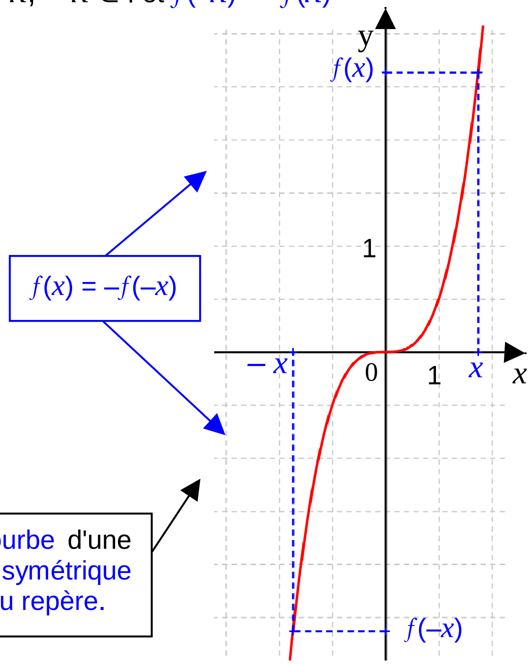
b) parité d'une fonction :

Soit une fonction f définie sur un intervalle I.

- ▶ f est une fonction paire si, pour tout nombre réel x, $-x \in$ I et $f(x) = f(-x)$
- ▶ f est une fonction impaire si, pour tout nombre réel x, $-x \in$ I et $f(-x) = -f(x)$

Dans un repère orthogonal, la courbe d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.





Dans un repère, la courbe d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine du repère.

II) Fonctions sinus et cosinus :

a) définitions :

► la fonction cosinus est la fonction notée cos qui, à chaque réel x, associe $\cos(x)$.

$$\cos : x \longmapsto \cos(x)$$

► la fonction sinus est la fonction notée sin qui, à chaque réel x, associe $\sin(x)$.

$$\sin : x \longmapsto \sin(x)$$

b) propriétés :

1► pour tout nombre réel x, $\cos(x) = \cos(-x)$: la fonction cosinus est paire

2► pour tout nombre réel x, $\sin(-x) = -\sin(x)$: la fonction sinus est impaire

3► la fonction cosinus est périodique de période 2π :
pour tout nombre réel x, $\cos(x) = \cos(x + 2\pi)$

4► la fonction sinus est périodique de période 2π :
pour tout nombre réel x, $\sin(x) = \sin(x + 2\pi)$

► ***démonstrations***

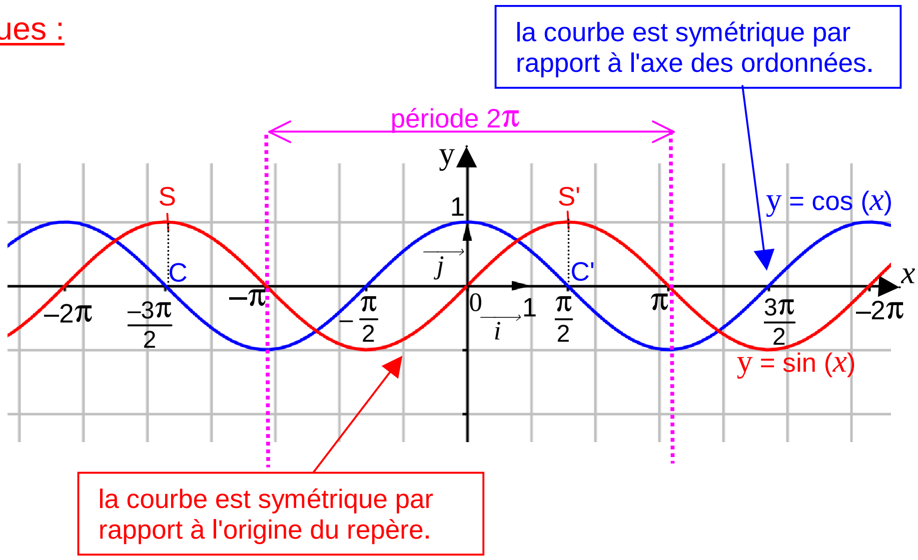
Ces propriétés découlent des propriétés des angles associés vues en première S.

c) représentations graphiques :

$S\left(\frac{-3\pi}{2},\cos\left(\frac{-3\pi}{2}\right)\right)$ et $S'\left(\frac{\pi}{2},\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$ sont tels que $\overrightarrow{SS'}=2\pi\,\vec{i}$. De même $C\left(\frac{-3\pi}{2},\sin\left(\frac{-3\pi}{2}\right)\right)$ et $C'\left(\frac{\pi}{2},\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$ sont tels que $\overrightarrow{CC'}=2\pi\,\vec{i}$.

Les courbes représentatives des fonctions cosinus et sinus sont invariantes par toute translation de vecteur $2k\pi\,\vec{i}$ où k est un entier relatif.

Il suffit donc d'étudier les fonctions sur un intervalle de longueur 2π !



d) dérivabilité des fonctions sinus et cosinus :

propriétés (admises) :

► La fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, on a :

$$\sin'(x)=\cos(x)$$

► La fonction cosinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, on a :

$$\cos'(x)=-\sin(x)$$

<u>remarque</u> : La fonction sinus est dérivable en 0. On a donc $\sin'(0) = \cos(0) = 1$

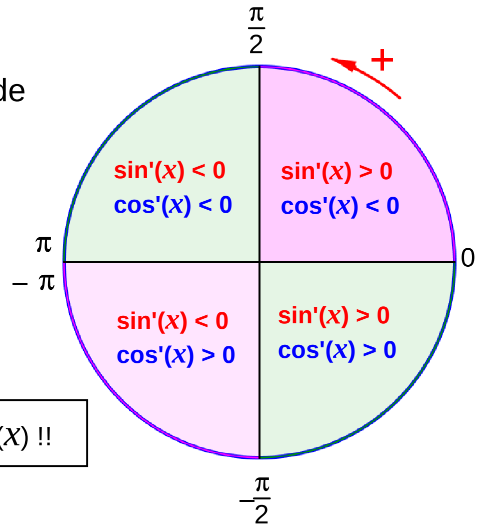
Par définition du nombre dérivé, on a donc $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\sin(h) - \sin(0)}{h - 0} = 1$ avec $h \in \mathbb{R}$

Par suite, $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\sin(h)}{h} = 1$

e) tableaux de variations :

Les fonctions sinus et cosinus sont périodiques de période 2π. Il suffit donc de les étudier sur un intervalle d'amplitude 2π. On prendra l'intervalle $[-\pi\ ;\ \pi]$.

le cercle trigonométrique permet de déterminer facilement le signe des fonctions dérivées sin'(x)



sin'(x)=cos(x) et cos'(x)=–sin(x) !!

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$		π
sin'(x) = cos (x)		–	0	+	0	–	
sin(x)	0	↘	–1	↗	1	↘	0

x	$-\pi$		0		π
cos'(x) = – sin (x)		+	0	–	
cos(x)	–1	↗	1	↘	–1