Probabilités conditionnelles - Indépendance

I) probabilité conditionnelle :

a) notion de probabilité conditionnelle - arbre pondéré :

expérience :

Le bilan comptable annuel d'une entreprise de location de voitures a permis de faire les constatations suivantes :

► Le parc automobile de l'entreprise comprend 67% de voitures roulant au diesel (D), les autres voitures utilisant l'essence (E).

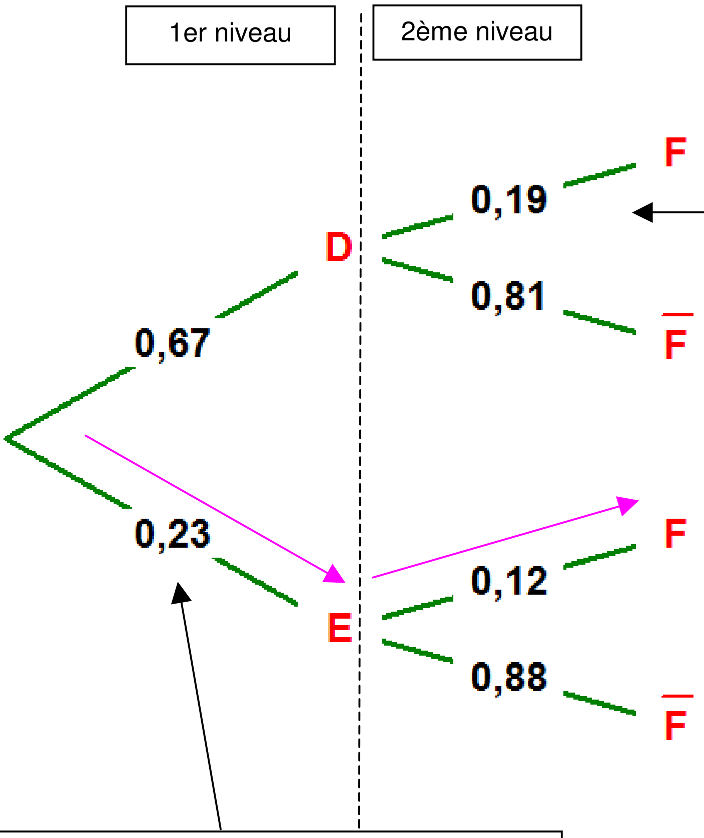
► Parmi les voitures au diesel, 19% ont occasionné des frais de réparation (F) alors que seulement 12% des voitures utilisant l'essence ont occasionné des frais de réparation.

On prend une voiture au hasard et on observe les deux critères évoqués (carburant utilisé, frais de réparation)

F désigne l'événement **«occasionne des frais de réparation»**

L'expérience est **aléatoire** (on ne peut pas prévoir son issue).
Son **univers** est **l'ensemble des voitures du parc automobile**.
La situation peut être représentée par un arbre **pondéré**.

«**pondéré**» signifie qu'on indique les probabilités sur les branches !



Les probabilités inscrites sur les branches du 2ème niveau sont des probabilités conditionnelles.
Ici 0,19 est la probabilité, pour une voiture choisie parmi les voitures diesel, d'entraîner des frais de réparation.
On la notera $P_D(F)$
«**probabilité de F sachant D**»

$\overline{F}$ est l'événement contraire de F.
$\overline{F}$ désigne ici l'événement **«n' occasionne pas de frais de réparation»**

$\xrightarrow{0,23} E \xrightarrow{0,12} F$ Ce chemin (flèches violettes) correspond à l'événement «la voiture choisie utilise l'essence **ET** occasionne des frais de réparation». On le note **F∩E.**
Le produit des probabilités des événements rencontrés **le long d'un chemin** est égal à la probabilité de l'intersection de ceux-ci.
P(F∩E) = 0,23 x 0,12 = 0,0276

On a donc $P(F\cap E) = P(E) \times P_E(F)$.

Par suite, $P_E(F) = \dfrac{P(F\cap E)}{P(E)}$

Nous allons généraliser cette notion de probabilité conditionnelle dans le paragraphe suivant.

La somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même nœud est égale à 1.
Ici, p(E) = 1 – p(D) = 1 – 0,67 = 0,23

Ex : Une voiture est choisie au hasard. Elle roule à l'essence. Quelle est la probabilité qu'elle n'occasionne pas de frais de réparation ?

probabilité de ne pas occasionner de frais de réparation sachant que la voiture est à essence !

$P_E(\overline{F}) = 0,88$

b) probabilité conditionnelle :

définition :
Soient A et B deux événements d'une même expérience aléatoire avec $P(A) \neq 0$.
La probabilité que l'événement B se réalise sachant que l'événement A est réalisé est le nombre noté $P_A(B)$ défini par :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

se lit «probabilité de B sachant A»

conséquences : On déduit de ce qui précède les expressions de l'intersection de deux événements A et B.
Si $P(A) \neq 0$, $\mathbf{P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A)}$
Si $P(B) \neq 0$, $\mathbf{P(A \cap B) = P_B(A) \times P(B)}$

Ex :
► Un magasin de la grande distribution constate que les retours de smartphones défectueux sont dus dans 40% des cas à une panne de batterie (B), dans 30% des cas à des soudures mal faites (S). Dans 5% des cas, le retour est dû aux deux pannes simultanées. Un smartphone choisi au hasard présente la panne B.
Quelle est la probabilité pour qu'il est aussi la panne S ?

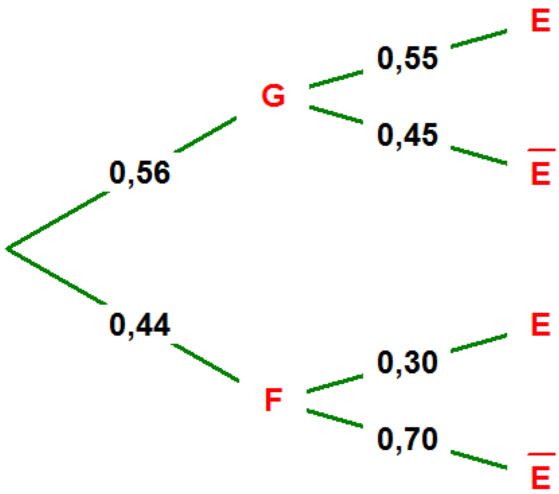
Calculons la probabilité de l'événement S quand B est réalisé soit $P_B(S)$

$$P_B(S) = \frac{P(B \cap S)}{P(B)} = \frac{0,05}{0,4} = 0,125$$

► Dans un lycée sans internat, 56% des élèves sont des garçons (G). 30% des filles (F) sont externes (E) et 45% des garçons sont demi-pensionnaires ($\bar{E}$).
On choisit au hasard une personne parmi les élèves.
Quelle est la probabilité que cette personne soit une fille et soit demi-pensionnaire ?

On dresse un arbre pondéré.

On a $P(F) = 1 - 0,56 = 0,44$
$P_G(E) = 1 - 0,45 = 0,55$
$P_F(\bar{E}) = 1 - 0,30 = 0,70$



La probabilité qu'une personne choisie soit une fille **ET** soit demi-pensionnaire se note $P(F \cap \bar{E})$

$$P(F \cap \bar{E}) = P_F(\bar{E}) \times P(F) = 0,70 \times 0,44 = 0,38$$

II) formule des probabilités totales :

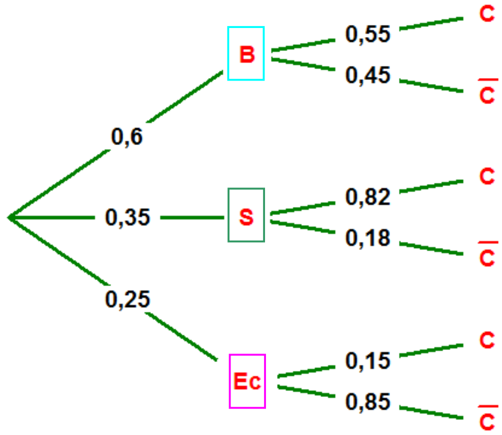
a) un exemple de calcul de probabilité à l'aide d'une partition :

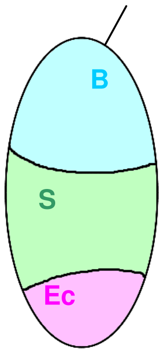
Nous allons légèrement modifier l'exemple précédent :
Un magasin de la grande distribution fait un sondage concernant les retours de smartphones défectueux ayant connu une panne unique. Dans 40% des cas, il s'agit de la batterie de l'appareil (B), dans 35% des cas de soudures mal faites (S) et le reste des retours est dû à la défectuosité de l'écran (Ec).
55% des smartphones ayant connu une panne B sont fabriqués en Chine (C), 82% de ceux ayant eu une panne S également. Seulement 15% des smartphones ayant un défaut à l'écran ont été fabriqués en Chine.
On choisit au hasard un des smartphones défectueux.
Quelle est la probabilité qu'il ait été fabriqué en Chine ?

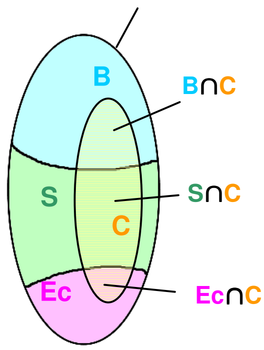
Pour faciliter la recherche, nous allons utiliser une autre représentation de la situation que celle de l'arbre pondéré en traçant des diagrammes.

Les événements B, S, Ec forment une partition de E. Leur intersection 2 à 2 est vide (panne unique).
▶ B∩S = Ec∩S = B∩Ec = Ø
▶ B∪Ec∪S = E

ils sont appelés diagrammes de Venn !







A l'aide de ces diagrammes, on peut donc exprimer C ainsi :
C = (B∩C) ∪ (S∩C) ∪ (Ec∩C)
De plus, B∩C, S∩C, Ec∩C sont incompatibles donc
P(C) = P(B∩C) + P(S∩C) + P(Ec∩C)
Or, $P(B\cap C) = P(B) \times P_B(C)$; $P(S\cap C) = P(S) \times P_S(C)$; $P(Ec\cap C) = P(Ec) \times P_{Ec}(C)$
Il en résulte que $P(C) = P(B) \times P_B(C) + P(S) \times P_S(C) + P(Ec) \times P_{Ec}(C)$
$= 0,6 \times 0,55 + 0,35 \times 0,82 + 0,25 \times 0,15 = 0,6545$

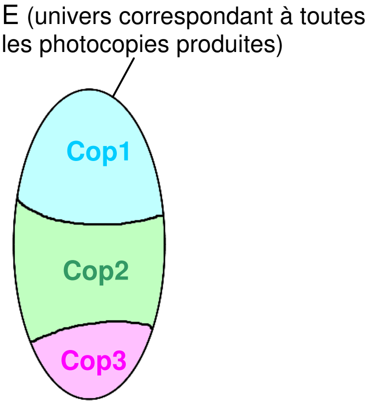
Nous allons généraliser ces résultats dans les paragraphes suivants!

b) partition de l'univers :

définition : Soit un entier naturel n. On dit que n événements A_1, A_2,....,A_n forment une partition de l'univers E si leur intersection est vide deux à deux et si leur réunion est l'univers E.

Ex : Dans un lycée, 3 photocopieuses Cop1, Cop2, Cop3 assurent respectivement 20%, 30% et 50% de la production de photocopies de l'établissement. On estime que 1,8% des photocopies de Cop1 ont des défauts. Les estimations pour Cop2 et Cop3 sont respectivement de 3% et 1% de copies défectueuses.
On choisit au hasard une photocopie dans le lycée et on observe si elle est présente un défaut ou non.

Cette expérience est aléatoire. Les événements Cop1 : «la photocopie provient de Cop1»; Cop2 : «la photocopie provient de Cop2» et Cop3 : «la photocopie provient de Cop3» forment une partition de E.



► E = { Cop_1,Cop_2,Cop_3 }

► $Cop_1 \cap Cop_2 = Cop_1 \cap Cop_3 = Cop_2 \cap Cop_3 = \varnothing$

c) formule des probabilités totales :

propriété (admise) :
Soit un entier naturel n. Soit E l'univers d'une expérience aléatoire.
Si les événements A_1, A_2,....,A_n constituent une partition de E alors pour tout événement B, on a :

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + ... + P(A_n \cap B)$$

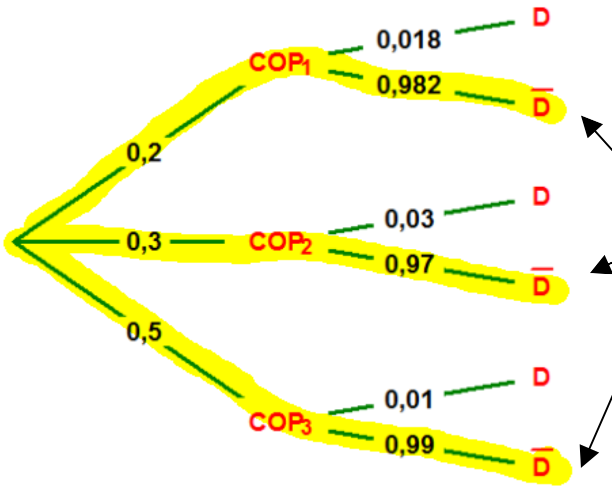
Si pour tout entier naturel i compris entre 1 et n, $p(Ai) \neq 0$ alors

$$P(B) = P(A_1) \text{ x } P_{A_1}(B) + P(A_2) \text{ x } P_{A_2}(B) + ... + P(A_n) \text{ x } P_{A_n}(B)$$

Ex : Reprenons la situation précédente.
Dans un lycée, 3 photocopieuses Cop1, Cop2, Cop3 assurent respectivement 20%, 30% et 50% de la production de photocopies de l'établissement. On estime que 1,8% des photocopies de Cop1 ont des défauts. Les estimations pour Cop2 et Cop3 sont respectivement de 3% et 1% de copies défectueuses.
On choisit au hasard une photocopie dans le lycée et on observe si elle est présente un défaut ou non.

Quelle est la probabilité que la photocopie choisie au hasard soit sans défaut ?
(l'événement : «la photocopie a un défaut» est noté D).

La probabilité cherché est $P(\overline{D})$.
<u>Représentons la situation par un arbre pondéré :</u>



la probabilité d' un événement correspondant à «plusieurs feuilles de l'arbre» est égale à la somme des probabilités de chacune des feuilles !

$P(\overline{D})$ = 0,2 x 0,982 + 0,3 x 0,97 + 0,5 x 0,99
= 0,9824

<u>On applique la formule des probabilités totales :</u>

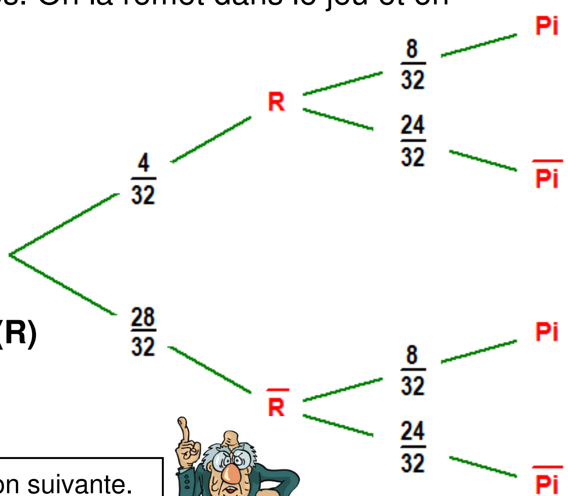
$P(\overline{D}) = P(Cop_1) \times P_{Cop_1}(\overline{D}) + P(Cop_2) \times P_{Cop_2}(\overline{D}) + P(Cop_3) \times P_{Cop_3}(\overline{D})$
$= 0{,}2 \times 0{,}982 + 0{,}3 \times 0{,}97 + 0{,}5 \times 0{,}99 = 0{,}9824$

III) Indépendance de deux événements :

a) notion d'événements indépendants :

il s'agit d'un tirage **avec remise** !

On imagine l'expérience suivante:
On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes. On la remet dans le jeu et on procède à un deuxième tirage au hasard.
<u>Soient les événements :</u>
R : « tirer un roi au premier tirage»
P_i : « tirer un pique au deuxième tirage»



Le fait que R soit ou pas réalisé ne change pas la probabilité de P_i !
On peut dire que P_i est indépendant de R.
On a donc $P_R(P_i) = P(P_i)$. D'où $\mathbf{P(P_i \cap R) = P(P_i) \times P(R)}$
Par suite, $P(P_i \cap R) = P(R) \times P_R(P_i) = P(P_i) \times P_{P_i}(R)$
Donc $P_{P_i}(R) = p(R)$. R est donc indépendant de P_i.

Cela amène la définition suivante.

b) événements indépendants :

<u>définition</u> : Deux événements A et B sont indépendants quand :
$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

attention, à ne pas confondre événements incompatibles et événements indépendants.
Si A et B sont incompatibles $P(A \cap B) = 0$.
Les deux événements A et B ne sont pas indépendants car $P(A) \times P(B) \neq 0$!

Ex :

On tire au hasard une boule dans la boite ci-contre :
Soient les événements V : «tirer une boule verte», R : «tirer une boule rouge», B : «tirer une boule bleue».
Soient les événements N1 : «tirer une boule numérotée 1», N2 : «tirer une boule numérotée 2» et N3 : «tirer une boule numérotée 3»

1► Les événements V et N1 sont-ils indépendants ?

2► Les événements V et N2 sont-ils indépendants ?

1► l'événement $V \cap N1$ correspond à «tirer une boule verte numérotée 1».

On a donc $P(V \cap N1) = \frac{1}{6}$. D'autre part $p(V) = \frac{1}{2}$ et $p(N1) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Par suite, $P(V \cap N1) = \frac{1}{6}$ et $P(V) \times P(N1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ donc $P(V \cap N1) \neq P(V) \times P(N1)$.

Il en résulte que les événements V et N1 ne sont pas indépendants.

2► $P_V(N2) = \frac{P(V \cap N2)}{P(V)} = \frac{1}{6} : \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$ et $P(N2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ donc $P_V(N2) = P(N2)$

Il en résulte que les événements V et N2 sont indépendants.

propriété : Si deux événements A et B sont indépendants, alors $\bar{A}$ et B le sont aussi.

► ***démonstration*** - *exigible* ROC -

$P(\bar{A}) \times P(B) = (1 - P(A)) \times P(B) = P(B) - P(A) \times P(B)$

Or, A et B sont indépendants donc $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

Par suite, $P(\bar{A}) \times P(B) = P(B) - P(A \cap B)$ donc $P(B) = P(A) \times P(B) + P(\bar{A}) \times P(B)$

Les événements A et $\bar{A}$ constituent une partition de l'univers donc

$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$ ← formule des probabilités totales !

Par suite,

$P(B) = P(A) \times P(B) + P(\bar{A} \cap B)$

Il en résulte que $P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A}) \times P(B)$

A et B jouant des rôles symétriques, A et $\bar{B}$ sont indépendants. Il en est de même pour $\bar{A}$ et $\bar{B}$