démonstrations exigibles au baccalauréat

fonction exponentielle (1/2)

propriété :
Il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$

► ***démonstration*** - *exigible* ROC -

1 ► L'existence de la fonction f est admise ← conformément au programme !

2 ► Démontrons l'unicité de f (raisonnement par l'absurde)
Supposons qu'il existe deux fonctions f et g dérivables sur $\mathbb{R}$ et telles que $f' = f$; $g' = g$; $f(0) = 1$ et $g(0) = 1$.

Considérons la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$

h est bien définie puisque g ne s'annule pas (voir propriété 1). De plus, h est dérivable sur $\mathbb{R}$ étant donné qu'il est le quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x, on a $h'(x) = \dfrac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{(g(x))^2} = \dfrac{f(x)g(x) - g(x)f(x)}{(g(x))^2} = 0$

Donc h est constante sur $\mathbb{R}$. Or $h(0) = \dfrac{f(0)}{g(0)} = \dfrac{1}{1} = 1$

Par suite, pour tout réel x, $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$ donc $f(x) = g(x)$. Il existe donc une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.

propriété :

1► $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ 2► $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

► ***démonstration*** - *exigible* ROC -

1► Démontrons que $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$:

Nous allons utiliser un théorème de comparaison (voir "limites de fonctions")

Considérons les deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ $f : x \longmapsto e^x$ et $g : x \longmapsto x$

Pour les comparer, nous allons étudier la fonction h = f – g

h est dérivable pour tout réel x et on a $h'(x) = (e^x - x)' = e^x - 1$, donc

$h'(x) \geqslant 0$ équivaut à $e^x - 1 \geqslant 0$ équivaut à $e^x \geqslant 1$ équivaut à $e^x \geqslant e^0$ équivaut à $x \geqslant 0$

On obtient donc le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		–	0	+	
$h(x)$		↘	1	↗	

On constate que la fonction h admet sur $\mathbb{R}$ un minimum : le nombre 1.

Donc, pour tout réel x, $e^x - x > 0$ soit $e^x > x$

Or, $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$, par suite $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.

(théorème de comparaison)

2► Démontrons que $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$:

On pose X = – x. On a donc $e^x = e^{-X}$

Or, $\lim\limits_{x \to -\infty} X = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = \lim\limits_{X \to +\infty} e^{-X} = \lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{1}{e^X}$

or, d'après la propriété de la limite de la composée de deux fonctions, $\lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{1}{e^X} = 0$

On peut donc conclure que $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$.

limite d'une suite (1/4)

Théorème de comparaison :

(u_n) et (v_n) sont deux suites définies sur $\mathbb{N}$.

1► si $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$

2► si $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$

► ***démonstration*** - *exigible* -

1►Soit A un nombre réel quelconque. On sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ donc (voir définition) l'intervalle $]A; +\infty[$ contient tous les termes u_n à partir d'un certain rang n_0. On sait également que $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang n_1. Appelons M le plus grand des entiers n_1 et n_0. A partir du rang M, $]A; +\infty[$ contient donc tous les u_n et à plus forte raison tous les v_n.

A étant quelconque, à partir du rang M, tout terme v_n est contenu dans tout intervalle ouvert $]A; +\infty[$. Par suite, $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$

2►Soit A un nombre réel quelconque. On sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$ donc (voir définition) l'intervalle $]-\infty ; A[$ contient tous les termes v_n à partir d'un certain rang n_0. On sait également que $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang n_1. Appelons M le plus grand des entiers n_1 et n_0. A partir du rang M, $]-\infty ; A[$ contient donc tous les v_n et à plus forte raison tous les u_n.

A étant quelconque, à partir du rang M, tout terme u_n est contenu dans tout intervalle ouvert $]-\infty ; A[$. Par suite, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$

propriétés :

1► Si une suite u_n est croissante et converge vers un nombre réel ℓ alors, pour tout entier naturel n, on a $u_n \leqslant \ell$

2► Si une suite u_n est décroissante et converge vers un nombre réel ℓ alors, pour tout entier naturel n, on a $u_n \geqslant \ell$

on tient un raisonnement par l'absurde !

► ***démonstration*** - *exigible* -

1► Supposons qu'il existe un entier naturel n_0 tel que $u_{n_0} > \ell$. Comme la suite est croissante, cela voudrait dire qu'à partir du rang n_0 tous les termes u_n sont en dehors de l'intervalle $]-\infty\,;u_{n_0}[$ C'est impossible puisque ℓ appartient à $]-\infty\,;u_{n_0}[$ et que cet intervalle ouvert doit contenir tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang. Donc, pour tout entier naturel n, on a $u_n \leqslant \ell$.

2► Supposons qu'il existe un entier naturel n_0 tel que $u_{n_0} < \ell$. Comme la suite est décroissante, cela voudrait dire qu'à partir du rang n_0 tous les termes u_n sont en dehors de l'intervalle $]u_{n_0}\,;+\infty[$ C'est impossible puisque ℓ appartient à $]u_{n_0}\,;+\infty[$ et que cet intervalle ouvert doit contenir tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang. Donc, pour tout entier naturel n, on a $u_n \geqslant \ell$.

propriétés :

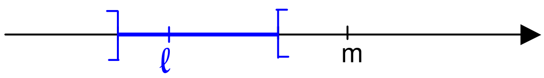
1 ▶ Si une suite (u_n) converge vers un nombre réel ℓ et que (u_n) est majorée par un nombre réel M alors $\ell \leqslant M$

2 ▶ Si une suite (u_n) converge vers un nombre réel ℓ et que (u_n) est minorée par un nombre réel m alors $\ell \geqslant m$

▶ ***démonstration*** - *exigible* ROC - (raisonnement par l'absurde)

1 ▶ Supposons que $\ell > M$. Considérons un intervalle I contenant ℓ et inclus dans l'intervalle ouvert $]M\,;+\infty[$. (u_n) a pour limite finie ℓ donc il existe un rang à partir duquel tous les termes de la suite sont dans I. C'est impossible puisque M est un majorant de (u_n). Par suite, $\ell \leqslant M$.

2 ▶ Supposons que $\ell < m$. Considérons un intervalle I contenant ℓ et inclus dans l'intervalle ouvert $]-\infty\,; m[$. (u_n) a pour limite finie ℓ donc il existe un rang à partir duquel tous les termes de la suite sont dans I. C'est impossible puisque m est un minorant de (u_n). Par suite, $\ell \geqslant m$.



limite d'une suite (4/4)

propriétés :

1► Si une suite (u_n) est croissante et **non** majorée alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

2► Si une suite (u_n) est décroissante et **non** minorée alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$

► ***démonstration*** - *exigible* ROC -

1► Soit une suite (u_n) croissante et non majorée. Si elle n'est pas majorée, cela veut dire que, quel que soit le nombre A, il existe un rang n_0 tel que $u_{n_0}>A$.
Comme la suite est croissante, tous les termes de rang supérieur à n_0 sont strictement supérieurs à A.
Il en résulte que, quel que soit le nombre A, il existe un rang n_0 à partir duquel tous les termes de la suite (u_n) sont dans l'intervalle ouvert $]A\,;+\infty[$.
(u_n) a donc pour limite $+\infty$ (voir définition de la limite infinie pour une suite).

2► Soit une suite (u_n) décroissante et non minorée. Si elle n'est pas minorée, cela veut dire que, quel que soit le nombre A, il existe un rang n_0 tel que $u_{n_0}<A$.
Comme la suite est décroissante, tous les termes de rang supérieur à n_0 sont donc strictement inférieurs à A.
Il en résulte que, quel que soit le nombre A, il existe un rang n_0 à partir duquel tous les termes de la suite un sont dans l'intervalle ouvert $]-\infty\,; A[$.
(u_n) a donc pour limite $-\infty$ (voir définition de la limite infinie pour une suite).

récurrence - limite d'une suite géométrique (1/1)

propriété :

Soit q un nombre réel, si $q>1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$

► ***démonstration*** - *exigible* -

Soit un nombre réel q tel que $q>1$. Soit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n=q^n$

$q > 1$ donc il existe un nombre réel a strictement supérieur à 0 tel que $q = 1 + a$

La suite (v_n) est alors définie sur $\mathbb{N}$ pour tout entier naturel n par $q^n = (1+a)^n$

Les premiers termes de la suite (v_n) s'écrivent donc :

$q^0 = (1 + a)^0 = 1 = 1 + 0a$

$q^1 = (1 + a)^1 = 1 + a = 1 + 1a$

$q^2 = (1 + a)^2 = 1 + 2a + a^2$

$q^3 = 1 + 3a + 3a^2 + a^3$ etc...

En observant les premiers termes, il semble utile de comparer les suites q^n et $1 + na$.

Pour cela, démontrons par récurrence que la propriété P_n : « $(1 + a)^n \geqslant 1 + na$ » est vraie pour tout entier naturel n.

cette propriété est **l'inégalité de Bernoulli** !

Initialisation :

Pour n=0, on a $(1 + a)^0 = 1$ or $1 = 1 + 0a$ donc $1 \geqslant 1 + 0a$ donc P_0 est vraie.

Hérédité : Soit n un entier naturel quelconque fixé.

Supposons que P_n est vraie. Montrons que P_{n+1} est vraie.

D'après l' hypothèse de récurrence, $(1 + a)^n \geqslant 1 + na$

donc $(1 + a)(1 + a)^n \geqslant (1 + a)(1 + na)$

donc $(1 + a)^{n+1} \geqslant 1 + a + na + na^2$

donc $(1 + a)^{n+1} \geqslant 1 + a(1 + n) + na^2$

or $na^2>0$ donc $(1 + a)^{n+1} \geqslant 1 + (n+1)a$

par suite, P_{n+1} est vraie

Conclusion : La propriété P_n étant vraie au rang 0 et étant héréditaire, elle est vraie pour tout entier naturel n et $(1 + a)^n \geqslant 1 + na$

On a $q^n = (1 + a)^n$ donc, d'après l'inégalité de Bernoulli, $q^n \geqslant 1 + na$ or, $a >0$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (1 + na) = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} (1 + a)^n = +\infty$ (théorème de comparaison).

Par suite, $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$

intégration et primitives (1/2)

appelé *Théorème fondamental de l'intégration* !

théorème :
Soit une fonction f continue et positive sur un intervalle [a ; b].

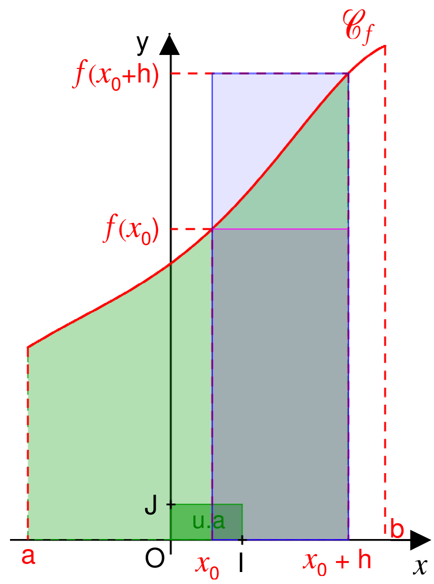
La fonction F définie sur [a ; b] par $F(x) = \int_a^x f(x)\,dx$ est dérivable sur [a ; b] et sa dérivée est la fonction f.

► ***démonstration*** - *exigible* ROC -

La démonstration est faite dans le cas où f est croissante sur [a;b], nous admettrons le théorème dans le cas général, pour toute fonction continue.

Soit une fonction f continue, positive et croissante sur [a;b]. Nommons $\mathscr{C}_f$, la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$.

Soit x_0 un nombre réel de [a;b] et h un nombre réel non nul tel que $x_0 + h \in [a;b]$.



Soit F la fonction définie sur [a;b] par $F(x) = \int_a^x f(x)\,dx$.

► **Si h >0**

f est croissante donc $f(x_0) \leqslant f(x_0 + h)$.

$F(x_0) = \int_a^{x_0} f(x)\,dx$ est l'aire comprise entre l'axe des abscisses et $\mathscr{C}_f$ sur $[a ; x_0]$

$F(x_0+h) = \int_a^{x_0+h} f(x)\,dx$ est l'aire entre l'axe des abscisses et $\mathscr{C}_f$ sur $[a ; x_0 +h]$

donc $F(x_0 + h) - F(x_0)$ est l'aire entre l'axe des abscisses et $\mathscr{C}_f$ sur $[x_0 ; x_0 +h]$

On encadre cette aire par les aires de deux rectangles de largeur h et de longueurs respectives $f(x_0)$ et $f(x_0 + h)$. Donc $h \times f(x_0) \leqslant F(x_0 + h) - F(x_0) \leqslant h \times f(x_0 + h)$

Donc $f(x_0) \leqslant \dfrac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} \leqslant f(x_0 + h)$. Or, f étant continue, $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h>0}} f(x_0 + h) = f(x_0)$.

Par suite, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h>0}} \dfrac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = f(x_0)$.

► Si h < 0

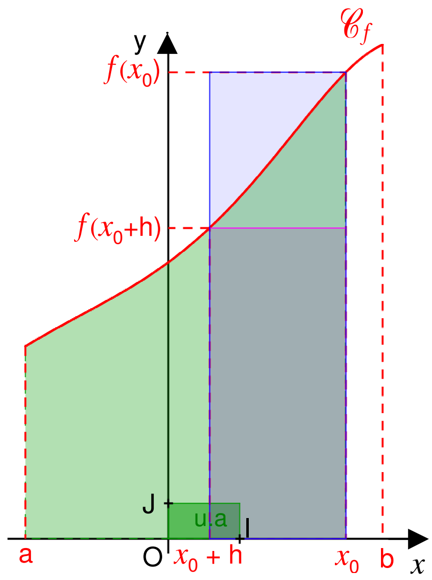
f est croissante donc $f(x_0 + \text{h}) \leqslant f(x_0)$

$\text{F}(x_0) = \displaystyle\int_{\text{a}}^{x_0} f(x)\,\mathrm{d}x$ est l'aire comprise entre l'axe des abscisses et $\mathscr{C}_f$ sur $[\text{a} ; x_0]$

$\text{F}(x_0+\text{h}) = \displaystyle\int_{\text{a}}^{x_0+\text{h}} f(x)\,\mathrm{d}x$ est l'aire entre l'axe des abscisses et $\mathscr{C}_f$ sur $[\text{a} ; x_0 + \text{h}]$

donc $\text{F}(x_0 + \text{h}) - \text{F}(x_0)$ est l'aire entre l'axe des abscisses et $\mathscr{C}_f$ sur $[x_0 ; x_0 + \text{h}]$

On peut encadrer cette aire par les aires de deux rectangles de largeur h et de hauteurs $f(x_0)$ et $f(x_0 + \text{h})$.



On a donc $\text{h} \times f(x_0) \leqslant \text{F}(x_0 + \text{h}) - \text{F}(x_0) \leqslant \text{h} \times f(x_0 + \text{h})$

Donc $f(x_0 + \text{h}) \leqslant \dfrac{\text{F}(x_0 + \text{h}) - \text{F}(x_0)}{\text{h}} \leqslant f(x_0)$. Or, f étant continue,

$\lim\limits_{\substack{\text{h} \to 0 \\ \text{h}<0}} f(x_0 + \text{h}) = f(x_0)$.

Par suite, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{\substack{\text{h} \to 0 \\ \text{h}<0}} \dfrac{\text{F}(x_0 + \text{h}) - \text{F}(x_0)}{\text{h}} = f(x_0)$.

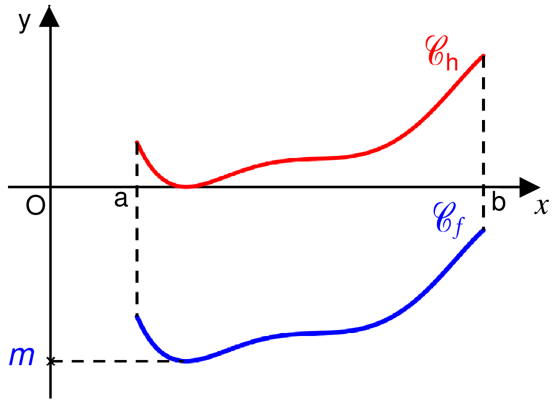
x_0 étant un nombre réel quelconque, nous avons donc démontré que la fonction F est dérivable sur [a;b] et que pour tout x de [a;b], $\text{F}'(x) = f(x)$.

intégration et primitives (2/2)

théorème : toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I

► ***démonstration*** - *exigible* -

La démonstration est faite dans le cas où f est une fonction continue sur un intervalle fermé I = [a;b].
Nous admettrons le théorème dans le cas général, c'est à dire pour toute fonction continue sur un intervalle quelconque.

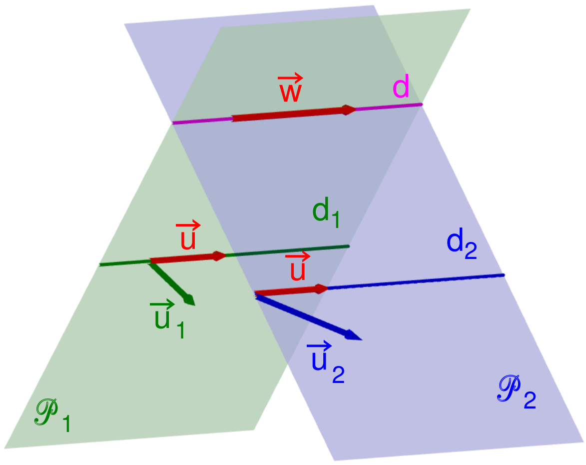


La démonstration nécessite la prise en compte de la propriété suivante (*admise*): *toute fonction continue sur un intervalle [a;b] admet un minimum et un maximum sur [a;b]*

Soit f une fonction continue sur un intervalle I = [a;b] et soit m son minimum sur [a;b]. Pour tout x appartenant à I, on a donc $f(x) - \mathrm{m} \geqslant 0$
La fonction h définie par $\mathrm{h}(x) = f(x) - \mathrm{m}$ est continue et positive. D'après le théorème du paragraphe précédent (théorème fondamental de l'intégration), h admet une primitive G sur I. On a donc, pour tout x de I,
$\mathrm{G}'(x) = \mathrm{h}(x) = f(x) - \mathrm{m}$. Par suite, la fonction F telle que $\mathrm{F}(x) = \mathrm{G}(x) + \mathrm{m}x$ est dérivable sur I et $\mathrm{F}'(x) = \mathrm{G}'(x) + \mathrm{m} = f(x) - \mathrm{m} + \mathrm{m} = f(x)$.
Il en résulte que F est une primitive de f sur I.

une application :
la démonstration du théorème du toit

rappel de la propriété :
Si deux plans sécants $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont sécants suivant une droite d et si d_1 et d_2 sont deux droites parallèles incluses respectivement dans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$, alors d est parallèle aux droites d_1 et d_2.



► ***démonstration*** *- exigible* ROC -

d_1 et d_2 sont parallèles par définition !

Soit $\vec{u}$ un vecteur directeur de d_1 et de d_2.
Soit $\vec{w}$ un vecteur directeur de d.
Soient $(\vec{u},\vec{u}_1)$ et $(\vec{u},\vec{u}_2)$ deux couples de vecteurs directeurs respectivement des plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$.

d'après la première des deux propriétés précédentes !

► d est contenue dans $\mathscr{P}_1$ donc il existe deux réels a_1 et b_1 tels que $\vec{w} = a_1\vec{u} + b_1\vec{u}_1$

► d est contenue dans $\mathscr{P}_2$ donc il existe deux réels a_2 et b_2 tels que $\vec{w} = a_2\vec{u} + b_2\vec{u}_2$

Par suite, $a_1\vec{u} + b_1\vec{u}_1 = a_2\vec{u} + b_2\vec{u}_2$ et $(a_1 - a_2)\vec{u} = b_2\vec{u}_2 - b_1\vec{u}_1$

Supposons que $a_1 \neq a_2$:
On aurait alors $\vec{u} = \dfrac{b_2}{a_1 - a_2}\vec{u}_2 - \dfrac{b_1}{a_1 - a_2}\vec{u}_1$ ce qui reviendrait à dire que $\vec{u}$, $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ sont coplanaires. Or, c'est impossible car les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont sécants.
Donc $a_1 = a_2$

Il découle de ce qui précède que $\cancel{a_1\vec{u}} + b_1\vec{u}_1 = \cancel{a_2\vec{u}} + b_2\vec{u}_2$ donc $b_1\vec{u}_1 = b_2\vec{u}_2$
Or, $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ ne sont pas colinéaires donc $b_1 = b_2 = 0$

Par suite, $\vec{w} = a_1\vec{u}$ et il en résulte que d_1 et d_2 sont parallèles.

deux droites ayant des vecteurs directeurs colinéaires sont parallèles !

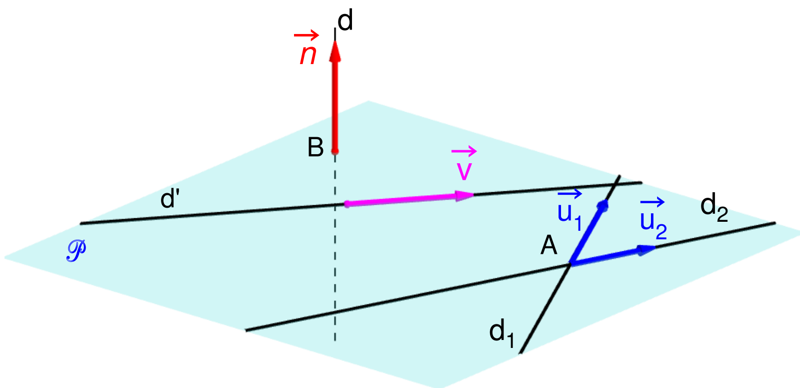
produit scalaire dans l'espace (1/3)

démonstration de la propriété admise dans le chapitre "espace"

rappel de la propriété :

Pour qu'une droite d soit orthogonale à un plan $\mathscr{P}$, il suffit qu'elle soit orthogonale à deux droites d_1 et d_2 sécantes contenues dans le plan $\mathscr{P}$.

► ***démonstration*** - *exigible* -



Soient deux droites d_1 et d_2 contenues dans un plan $\mathscr{P}$ et sécantes en A.

Soient $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$ deux vecteurs directeurs respectivement de d_1 et d_2.

Soit $\vec{n}$ un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$.

Soit la droite d de vecteur directeur $\vec{n}$ et passant par un point B de $\mathscr{P}$.

$\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$ sont non nuls et non colinéaires. On peut donc définir le $\mathscr{P}$ ainsi : (A ; $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$).

Par hypothèse, d est orthogonale à d_1 et à d_2 donc $\vec{n}.\vec{u_1} = \vec{n}.\vec{u_2} = 0$.

Soit une droite quelconque d' contenue dans $\mathscr{P}$ et de vecteur directeur $\vec{v}$.

Il existe deux réels a et b tels que $\vec{v} = a\vec{u_1} + b\vec{u_2}$.

Donc, $\vec{n}.\vec{v} = (a\vec{u_1} + b\vec{u_2}).\vec{n} = a\vec{u_1}.\vec{n} + b\vec{u_2}.\vec{n} = 0$

Par suite, d est orthogonale à une droite quelconque d' du plan $\mathscr{P}$.

Il en résulte que d est orthogonale au plan $\mathscr{P}$.

produit scalaire dans l'espace (2/3)

propriété : L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$
Soit $\vec{n}$ (a;b;c) un vecteur normal à $\mathscr{P}$.
$\mathscr{P}$ a une équation cartésienne de la forme $ax + by + cz + d = 0$ avec d étant un réel.

► ***démonstration*** - *exigible* ROC -
Soit un point $A(x_A ; y_A ; z_A)$ de $\mathscr{P}$. Soit un point $M(x ; y ; z)$ quelconque de $\mathscr{P}$.
$\overrightarrow{AM}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux donc $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$. Donc, $a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$.
D'où $ax + by + cz - a(x_A + by_A + cz_A) = 0$.
On a bien une équation du type $ax + by + cz + d = 0$ avec $d = - a(x_A + by_A + cz_A)$.

produit scalaire dans l'espace (3/3)

propriété : L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$
Pour tous réels a, b, c non tous nuls, l'ensemble des points $M(x ; y ; z)$ tels que $ax + by + cz + d = 0$ est un plan.

► ***démonstration*** - *exigible* ROC -

Soit $\mathscr{P}$ l'ensemble des points $M(x ; y ; z)$ vérifiant l'équation $ax + by + cz + d = 0$.
a, b, c étant non tous nuls, supposons que $a \neq 0$.
Le point $A\left(-\frac{d}{a} , 0 , 0\right)$ vérifie l'équation cartésienne et appartient donc à $\mathscr{P}$.
Soit le vecteur $\vec{n}(a ; b ; c)$. On a $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = a\left(x - \left(-\frac{d}{a}\right)\right) + by + cz = ax + by + cz + d$.
L'ensemble des points M est donc tel que $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$
Il s'agit donc du plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

propriété : Si deux événements A et B sont indépendants, alors $\bar{A}$ et B le sont aussi.

► ***démonstration*** - *exigible* ROC -

$P(\bar{A}) \times P(B) = (1 - P(A)) \times P(B) = P(B) - P(A) \times P(B)$
Or, A et B sont indépendants donc $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$
Par suite, $P(\bar{A}) \times P(B) = P(B) - P(A \cap B)$ donc $P(B) = P(A) \times P(B) + P(\bar{A}) \times P(B)$
Les événements A et $\bar{A}$ constituent une partition de l'univers donc
$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$ ← formule des probabilités totales !
Par suite,
$P(B) = P(A) \times P(B) + P(\bar{A} \cap B)$

Il en résulte que $P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A}) \times P(B)$

lois de probabilité à densité (1/1)

propriété : Soit λ un nombre réel positif.
Soit une variable aléatoire X suivant une loi exponentielle de paramètre λ.
L' espérance de X est donnée par :

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

► ***démonstration*** - *exigible* ROC -
Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(t) = t f(t)$. f est une densité de probabilité donc elle est continue sur $[0\,;+\infty[$. Par suite, h est continue et admet donc des primitives sur $[0\,;+\infty[$.

Or, pour tout réel positif t, on a $\left(t \times e^{-\lambda t}\right)' = 1 \times e^{-\lambda t} - \lambda e^{-\lambda t} = e^{-\lambda t} - \lambda t e^{-\lambda t}$

On peut donc écrire :

$$\int_0^x h(t)dt = \int_0^x t \times \lambda e^{-\lambda t} dt = -\int_0^x \left(t \times e^{-\lambda t}\right)' dt + \int_0^x e^{-\lambda t}\, dt$$

donc,

$$\int_0^x h(t)dt = -\left[\, t e^{-\lambda t}\right]_0^x + \left[-\frac{e^{-\lambda t}}{\lambda}\right]_0^x = -\left(x e^{-x} - 0\right) + \left[\frac{-e^{-\lambda x}}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\right] = \frac{1}{\lambda} - x e^{-\lambda x} - \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}$$

or, $\lim\limits_{x \to +\infty} - x e^{-\lambda x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} - \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} = 0$

donc $E(X) = \lim\limits_{x \to +\infty} \int_0^x t \times f(t)dt = \lim\limits_{x \to +\infty} \int_0^x h(t)dt = \frac{1}{\lambda}$

loi normale (1/1)

propriété :

Soit une variable aléatoire X suivant la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\ ;\ 1)$.

Pour tout réel α tel que $0 < \alpha < 1$, il existe un unique réel strictement positif u_α tel que : $P(-u_\alpha \leqslant X \leqslant u_\alpha) = 1 - \alpha$

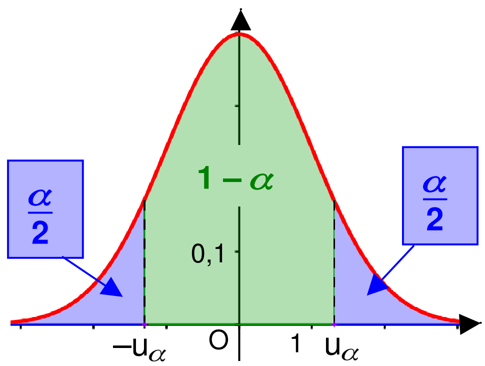
► ***démonstration*** - *exigible* ROC -

Soit un nombre réel u.

La courbe de la densité f associée à la variable aléatoire X est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

On a donc :

$$P(-u \leqslant X \leqslant u) = 2 \times P(0 \leqslant X \leqslant u) = 2\int_0^u f(x)\mathrm{d}x = 2F(u)$$



où F est la primitive unique de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0.

Or, F est continue et strictement croissante (f>0) sur $[0\ ;+\infty[$.

De plus, $\lim\limits_{u \to +\infty} F(u) = \dfrac{1}{2}$ (aire sous la courbe de f sur $[0\ ;+\infty[$)

On obtient alors le tableau de variation de la fonction 2F suivant :

On sait que $1 - \alpha \in [0;1]$ (car $0 < \alpha < 1$).

x	0	u_α	$+\infty$
$2F(x)$	0 ↗	$1-\alpha$	↗ 1

De plus, 2F est continue et strictement croissante sur $[0\ ;+\infty[$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel u_α tel que :

$2F(u_\alpha) = 1 - \alpha$. Il en résulte que :

$P(-u_\alpha \leqslant X \leqslant u_\alpha) = 1 - \alpha$

intervalle de fluctuation - intervalle de confiance (1/2)

propriété :

Si X_n est une variable aléatoire suivant une loi binomiale $\mathscr{B}(n\,;\,p)$ avec $p \in\ ]0;1[$,
alors pour tout nombre réel α appartenant à $]0;1[$,

$$\lim_{n \to +\infty} P\left(\frac{X_n}{n} \in I_n\right) = 1 - \alpha \quad \text{avec } I_n = \left[p - u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\ ,\ p + u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$$

et u_α est le réel tel que $P(-u_\alpha \leqslant Z \leqslant u_\alpha) = 1 - \alpha$ quand Z suit $\mathcal{N}(0\,;\,1)$.

I_n est appelé intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de $1 - \alpha$

> $\dfrac{X_n}{n} = F_n$ correspond à la fréquence des succès lors de la répétition de **n** épreuves de Bernoulli indépendantes de paramètre **p** !

► ***démonstration*** - *exigible* -

Posons $Z_n = \dfrac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$

D'après le théorème de Moivre-Laplace, $\lim\limits_{n \to +\infty} P(-u_\alpha \leqslant Z_n \leqslant u_\alpha) = P(-u_\alpha \leqslant Z \leqslant u_\alpha)$

avec Z suivant $\mathcal{N}(0\,;\,1)$.

$$\begin{aligned}
\text{Or, } P(-u_\alpha \leqslant Z_n \leqslant u_\alpha) &= P(-u_\alpha\sqrt{np(1-p)} \leqslant Z_n\sqrt{np(1-p)} \leqslant u_\alpha\sqrt{np(1-p)}) \\
&= P\Big(np - u_\alpha\sqrt{np(1-p)} \leqslant np + Z_n\sqrt{np(1-p)} \leqslant np + u_\alpha\sqrt{np(1-p)}\Big) \\
&= P\Big(np - u_\alpha\sqrt{np(1-p)} \leqslant X_n \leqslant np + u_\alpha\sqrt{np(1-p)}\Big) \\
&= P\left(\frac{np - u_\alpha\sqrt{np(1-p)}}{n} \leqslant \frac{X_n}{n} \leqslant \frac{np + u_\alpha\sqrt{np(1-p)}}{n}\right) \\
&= P\left(\frac{p - u_\alpha\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leqslant \frac{X_n}{n} \leqslant \frac{p + u_\alpha\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right)
\end{aligned}$$

or, nous avons établi précédemment que $P(-u_\alpha \leqslant Z \leqslant u_\alpha) = 1 - \alpha$

Donc, $\lim\limits_{n \to +\infty} P(-u_\alpha \leqslant Z_n \leqslant u_\alpha) = \lim\limits_{n \to +\infty} P\left(\dfrac{X_n}{n} \in I_n\right) = 1 - \alpha$

intervalle de fluctuation - intervalle de confiance (2/2)

propriété : Soit une population pour laquelle la proportion p d'un certain caractère est inconnue. Soit F_n la variable aléatoire qui associe à chaque échantillon de taille n la fréquence du caractère étudié. On suppose que $n \geqslant 30$, $np \geqslant 5$, $np(1-p) \geqslant 5$

La proportion inconnue p vérifie $P\left(F_n - \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant p \leqslant F_n + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \simeq 0{,}95$

► ***démonstration*** - *exigible* ROC -

Nous avons vu en seconde que, dans environ 95% des cas, Fn appartient à l'intervalle $\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}\,,\, p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$, ce qui revient à dire que $P\left(p - \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant F_n \leqslant p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \simeq 0{,}95$

Or, $p - \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant F_n \leqslant p + \frac{1}{\sqrt{n}}$ équivaut à $-\frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant F_n - p \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}$

équivaut à $-\frac{1}{\sqrt{n}} - F_n \leqslant -p \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}} - F_n$

équivaut à $F_n - \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant p \leqslant F_n + \frac{1}{\sqrt{n}}$

Il en résulte que $P\left(F_n - \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant p \leqslant F_n + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \simeq 0{,}95$