Nombres complexes

préambule :
En 1545, dans son ouvrage *Artis magnae sive regulis algebraicus*, le mathématicien italien Cardan veut résoudre l'équation : $x(10 - x) = 40$. Il est confronté à une opération impossible : déterminer les racines carrées de nombres négatifs.
Il donne cependant alors deux solutions (5. p. R. m. 15 et 5. m. R. m. 15) qu'on pourrait écrire aujourd'hui ainsi : $5 + \sqrt{-15}$ et $5 - \sqrt{-15}$.
Cardan, conscient qu'en théorie l'équation est impossible à résoudre, demande à ses lecteurs de faire preuve d'imagination et appelle ces nombres des *quantités sophistiquées*. Le mathématicien français Descartes les qualifiera bien plus tard en 1637 de *nombres imaginaires*.

i comme "imaginaire" !

Au 18ème siècle, on introduit le symbole " i " tel que $i^2 = -1$.
De manière plus cohérente, $5 + \sqrt{-15}$ $\left(5 + \sqrt{15}\sqrt{-1}\right)$ s'écrit alors $5 + \sqrt{15}i$

En 1831, le mathématicien allemand Gauss désigne les nombres s'écrivant a + bi (avec a et b deux nombres réels) sous l'appellation de nombres complexes.

attention ! tout réel est aussi un complexe. $-5 = -5 + 0i$

I) Notion de nombre complexe :

a) forme algébrique d'un nombre complexe :

définition : Nous admettrons qu'il existe un ensemble de nombres appelés nombres complexes. Cet ensemble, noté $\mathbb{C}$, vérifie les propriétés suivantes :

- $\mathbb{C}$ contient l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.
- $\mathbb{C}$ contient un nombre i tel que $i^2 = -1$
- $\mathbb{C}$ est muni d'une addition et d'une multiplication suivant des règles de calcul similaires à celles adoptées pour les nombres réels.

définition : Tout nombre complexe z s'écrit de manière unique sous la forme a + bi avec a et b deux nombres réels. Cette écriture est appelée la forme algébrique de z.
► a est la partie réelle de z, on la note Re(z)
► b est la partie imaginaire de z, on la note Im(z)
► Si b = 0, z est un nombre réel (z = a)
► Si a = 0, z est un imaginaire pur (z = bi)

les parties réelles et imaginaires d'un nombre complexe sont des nombres réels !

Ex : Soit $z = -5 + \sqrt{3}i$, on a Re(z) = –5 et Im(z) = $\sqrt{3}$

propriété : Deux nombres complexes sont égaux, si et seulement si, ils ont même partie réelle et même partie imaginaire.
a + bi = a' + b'i équivaut à a=a' et b=b' (avec a, b, a', b' des nombres réels)
remarque : a + bi = 0 équivaut à a=0 et b=0 (avec a et b des nombres réels)

cette propriété est déduite de l'unicité de l'écriture algébrique d'un nombre complexe !

b) calculs algébriques dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes :

Soient deux nombres complexes z = a+bi et z' = a'+b'i (a, b, a', b' sont des nombres réels)

▶ addition, multiplication

n'oublions pas que $i^2 = -1$!

D'après les propriétés de l'ensemble $\mathbb{C}$,

- $z + z' = (a + bi) + (a' + b'i) = (a + a') + (b + b')i$
- $zz' = (a + bi)(a' + b'i) = aa' + bb'i^2 + a'bi + ab'i = (aa' - bb') + (ab' + a'b)i$

les identités remarquables restent valables dans $\mathbb{C}$! en voici une nouvelle à retenir :
$(a + bi)(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 - b^2i^2 = a^2 + b^2$

Ex :

- $(1 + 5i) + (-7 + 2i) = (1 - 7) + (5 + 2)i = -6 + 7i$
- $9 - 5i - (-6 - 4i) = 9 - 5i + 6 + 4i = 15 - i$ $\quad i^2 = -1$!
- $(3 - 2i)(-7 + 5i) = -21 + 15i + 14i - 10 \times (-1) = -11 + 28i$
- Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation : $5z + 3 - 4i = 7$

$5z + 1 - 4i = 7$

donc $5z = 7 - 1 + 4i$

donc $5z = 6 + 4i$

donc $z = \frac{6}{5} + \frac{4}{5}i$

▶ inverse, quotient

propriété :

Tout nombre complexe z tel que z ≠ 0 admet un inverse noté $\frac{1}{z}$

Soit $z = a + bi$ (avec a et b des nombres réels tous deux différents de 0)

l'inverse de z est $\frac{1}{z} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}$

▶ ***démonstration***

Soit z = a + bi (avec a et b deux nombres réels tels que a ≠ 0 et b ≠ 0)

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a + bi} = \frac{1 \times (a - bi)}{(a + bi)(a - bi)} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}$$

Ex : L'inverse de $5 - i$ est $\frac{1}{5 - i} = \frac{5 + i}{5^2 + (-1)^2} = \frac{5 + i}{26} = \frac{5}{26} + \frac{1}{26}i$; celui de i est $\frac{1}{i} = -i$

définition : Soient deux nombres complexes z = a+bi et z' = a'+b'i (a, b, a', b' sont des réels et z' ≠ 0)

Le quotient de z' par z est défini par $\frac{z'}{z} = z' \times \frac{1}{z}$

Ex : $\frac{3 + 2i}{1 - i} = (3 + 2i) \times \frac{1}{1 - i} = (3 + 2i) \times \frac{1 + i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{5}{2}i$

II) Conjugué d' un nombre complexe :

définition : Soit un nombre complexe z de forme algébrique $z = a+bi$ (avec a et b deux réels)

Le conjugué de z est le nombre complexe de forme algébrique $a - bi$. On le note $\bar{z}$.

$\bar{z}$ se lit "z barre"

Ex :

- Si $z = 8 - 2i$, alors $\bar{z} = 8 + 2i$
- $\overline{5 - 6i} = 5 + 6i$
- $\bar{i} = -i$
- $\bar{7} = 7$

remarques : Soit un nombre complexe z de forme algébrique $z = a+bi$ (avec a et b deux réels)

► Le produit d'un nombre complexe par son conjugué est un nombre réel positif.

$$z\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$$

Ex : $(5 + 7i)(5 - 7i) = 5^2 + 7^2 = 74$

► $z + \bar{z} = 2a = 2\mathrm{Re}(z)$ et $z - \bar{z} = 2bi = 2\mathrm{Im}(z)i$. Il en résulte que :

- z est un réel équivaut à $z = \bar{z}$
- z est un imaginaire pur équivaut à $z = -\bar{z}$

propriétés :

Soient deux nombres complexes z et z'. Soit n un entier naturel non nul.

1► $\bar{\bar{z}} = z$ 2► $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$ 3► $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z}'$

4► $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$ 5► $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}$ 6► $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$

► ***démonstrations***

Soient deux nombres complexes $z = a+bi$ et $z' = a'+b'i$ (a, b, a', b' sont des nombres réels)

1► $\bar{z} = a - bi$ donc $\bar{\bar{z}} = \overline{a - bi} = a - (-bi) = a + bi = z$

2► $\overline{z + z'} = \overline{(a + a') + (b + b')i} = (a + a') - (b + b')i = (a - bi) + (a' - b'i) = \bar{z} + \bar{z}'$

3►

On a, $z \times z' = (a + bi)(a' + b'i) = aa' + ab'i + a'bi + bb'i^2 = (aa' - bb') + (ab' + a'b)\, i$

donc $\overline{z \times z'} = (aa' - bb') - (ab' + a'b)i$

D'autre part, $\bar{z} = a - bi$ et $\bar{z}' = a - b'i$

Donc, $\bar{z} \times \bar{z}' = (a - bi)(a - b'i) = (aa' - bb') - (ab' + ab')i = \overline{z \times z'}$

4► On suppose que z est différent de 0

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+bi} = \frac{a - bi}{(a+bi)(a - bi)} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}\, i$$

donc $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{a}{a^2 + b^2} + \frac{b}{a^2 + b^2}\, i$

D'autre part,

$$\bar{z} = a - bi = \text{donc } \frac{1}{\bar{z}} = \frac{1}{a-bi} = \frac{a + bi}{(a-bi)\,(a + bi)} = \frac{a + bi}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} + \frac{b}{a^2 + b^2}i$$

Par suite, $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$

5▶ On suppose que z' est différent de 0

$\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \overline{\left(z \times \frac{1}{z'}\right)} = \bar{z} \times \overline{\left(\frac{1}{z'}\right)}$ (voir propriété 3)

Or, d'après la propriété précédente, $\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \frac{1}{\bar{z}'}$

donc $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \bar{z} \times \frac{1}{\bar{z}'} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}$

6▶ Démontrons par récurrence que la propriété P_n: « $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$ » est vraie pour $n \in \mathbb{N}^*$

<u>Initialisation</u> : Pour n=1, on a $\overline{z^1} = \bar{z} = (\bar{z})^1$ donc la propriété P_1 est vraie.

<u>Hérédité</u> : Soit n un entier naturel ($n \geqslant 1$) quelconque fixé.
Supposons que P_n est vraie (hypothèse de récurrence). Montrons que P_{n+1} est vraie.

D'après l' hypothèse de récurrence, $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$ donc $\overline{z^n} \times \bar{z} = (\bar{z})^n \times \bar{z}$

Or, d'après la propriété 3, $\overline{z^n} \times \bar{z} = \overline{z^n \times z} = \overline{z^{n+1}}$ donc $\overline{z^{n+1}} = (\bar{z})^n \times \bar{z} = (\bar{z})^{n+1}$

Par suite, la propriété P_{n+1} est vraie.

<u>Conclusion</u> : La propriété P_n étant vraie au rang 1 et étant héréditaire, elle est vraie pour tout entier naturel n ($n \geqslant 1$).

<u>III) Module d' un nombre complexe :</u>

<u>définition</u> :
Soit un nombre complexe z de forme algébrique z = a + b*i* (avec a et b deux réels)
Le module de z, noté $|z|$, est le nombre réel positif $\sqrt{a^2 + b^2}$

<u>propriétés</u> :
Soient deux nombres complexes z et z' que $z' \neq 0$, soit un entier naturel n

1▶ $|z|^2 = z\bar{z}$ **2▶** $|z| = |-z|$ **3▶** $|\bar{z}| = |z|$ **4▶** $|z \times z'| = |z| \times |z'|$

5▶ $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$ **6▶** $|z|^n = |z^n|$ **7▶** $|z + z'| \leqslant |z| + |z'|$

inégalité triangulaire, nous comprendrons mieux pourquoi à la fin du chapitre dans le paragraphe VIII !

▶ ***démonstrations***

Soient deux nombres complexes z = a+b*i* et z' = a'+b'*i*
(a, b, a', b' sont des nombres réels et $z' \neq 0$)

1▶ $z\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 = \left(\sqrt{a^2 + b^2}\right)^2 = |z|^2$

2▶ $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(-a)^2 + (-b)^2} = |-a - bi| = |-z|$

3▶ $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = |a - bi| = |\bar{z}|$

4▶ $|z \times z'| = |(a + bi)(a' + b'i)| = |aa' - bb' + (a'b + ab')i| = \sqrt{(aa' - bb')^2 + (a'b + ab')^2}$
$= \sqrt{a^2a'^2 - 2aa'bb' + b^2b'^2 + a'^2b^2 + 2a'bab' + a^2b'^2} = \sqrt{a^2a'^2 + b^2b'^2 + a'^2b^2 + a^2b'^2}$
$= \sqrt{a^2(a'^2 + b'^2) + b^2(a'^2 + b'^2)} = \sqrt{(a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2)} = \sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{a'^2 + b'^2} = |z| \times |z'|$

propriété 1

le conjugué d'un quotient est le quotient des conjugués !

5▶ $\left|\dfrac{z}{z'}\right|^2 = \dfrac{z}{z'} \times \left(\overline{\dfrac{z}{z'}}\right) = \dfrac{z\bar{z}}{z'\bar{z}'} = \dfrac{|z|^2}{|z'|^2}$ or, un module est un réel positif, donc $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$

6▶ Démontrons par récurrence que la propriété P_n: «$|z|^n = |z^n|$» est vraie pour $n \in \mathbb{N}$

Initialisation : Pour n=0, $|z|^0 = 1 = |z^0|$ donc la propriété P_0 est vraie.

Hérédité : Soit n un entier naturel quelconque fixé.

Supposons que P_n est vraie (hypothèse de récurrence). Montrons que P_{n+1} est vraie.

On a $|z|^{n+1} = |z|^n \times |z|$

D'après l' hypothèse de récurrence, $|z|^n = |z^n|$ donc $|z|^{n+1} = |z|^n \times |z| = |z^n| \times |z|$

Or, d'après la propriété 4, $|z \times z'| = |z| \times |z'|$

Donc $|z|^{n+1} = |z|^n \times |z| = |z^n| \times |z| = |z^n \times z| = |z^{n+1}|$

Par suite, la propriété P_{n+1} est vraie.

Conclusion : La propriété P_n étant vraie au rang 0 et étant héréditaire, elle est vraie pour tout entier naturel n.

7▶ Démontrons que $|z + z'| \leqslant |z| + |z'|$.

Les deux membres étant positifs, cela revient à comparer leurs carrés.

$|z + z'|^2 = (z + z')(\overline{z + z'}) = (z + z')\,(\bar{z} + \bar{z}') = z\bar{z} + z\bar{z}' + z'\bar{z} + z'\bar{z}' = |z|^2 + |z'|^2 + z\bar{z}' + z'\bar{z}$

Or, $z'\bar{z} = \overline{\bar{z}'z}$ donc $z\bar{z}' + z'\bar{z} = z\bar{z}' + \overline{\bar{z}'z} = 2\text{Re}(z\bar{z}')$ donc $|z + z'|^2 = |z|^2 + |z'|^2 + 2\text{Re}(z\bar{z}')$

D'autre part, $(|z| + |z'|)^2 = |z|^2 + 2|z||z'| + |z'|^2$

De plus, on a $|z\bar{z}'|^2 = \big(\text{Re}(z\bar{z}')\big)^2 + \big(\text{Im}(z\bar{z}')\big)^2$ donc $\big(\text{Re}(z\bar{z}')\big)^2 \leqslant |z\bar{z}'|^2$

On en déduit que $\text{Re}(z\bar{z}') \leqslant |z\bar{z}'|$.

Donc $|z|^2 + |z'|^2 + 2\text{Re}(z\bar{z}') \leqslant |z|^2 + |z'|^2 + 2|z\bar{z}'|$

Par suite, $|z + z'|^2 \leqslant (|z| + |z'|)^2$

IV) Équations du second degré dans $\mathbb{C}$:

propriété : Soient a, b, c trois réels avec $a \neq 0$

Dans $\mathbb{C}$, l'équation $az^2 + bz + c = 0$ a toujours une solution.

Le discriminant de l'équation est $\Delta = b^2 - 4ac$.

▶ Si $\Delta > 0$, l'équation a deux solutions réelles : $z_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

▶ Si $\Delta = 0$, l'équation a une solution double réelle : $z_0 = \dfrac{-b}{2a}$

▶ Si $\Delta < 0$, l'équation a deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

$\boxed{z_2 = \bar{z}_1\ !}$

Soient z_1 et z_2 les solutions de l'équation $az^2 + bz + c = 0$ (dans le cas où $\Delta = 0$, $z_1 = z_2$).
Pour tout nombre complexe z,
le trinôme $az^2 + bz + c$ peut se factoriser sous la forme $a(z - z_1)(z - z_2)$

▶ ***démonstration*** Soient a, b, c trois réels avec $a \neq 0$

$$az^2 + bz + c = a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] = a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

forme canonique du trinôme !

Etant donné que $a \neq 0$,

résoudre dans $\mathbb{C}$, $az^2 + bz + c = 0$ revient donc à résoudre $\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0$

▶ **Si $\Delta > 0$**

On a $\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$ donc $z + \frac{b}{2a} = \sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}$ ou $z + \frac{b}{2a} = -\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}$

<u>On obtient alors deux solutions réelles :</u>

$$z_1 = -\frac{b}{2a} + \sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}} = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = -\frac{b}{2a} - \sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}} = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

▶ **Si $\Delta = 0$**, on a $\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2} = 0$ donc $z + \frac{b}{2a} = 0$

<u>On obtient alors une solution réelle</u> : $z_0 = -\frac{b}{2a}$

▶ Si $\Delta < 0$ alors $-\Delta > 0$

$i^2 = -1$

On a $\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = i^2\frac{-\Delta}{4a^2}$ donc $z + \frac{b}{2a} = i\sqrt{\frac{-\Delta}{4a^2}}$ ou $z + \frac{b}{2a} = -i\sqrt{\frac{-\Delta}{4a^2}}$

<u>On obtient alors deux solutions complexes conjuguées :</u>

$$z_1 = -\frac{b}{2a} + i\sqrt{\frac{-\Delta}{4a^2}} = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = -\frac{b}{2a} - i\sqrt{\frac{-\Delta}{4a^2}} = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

<u>Ex :</u> Résolvons l'équation $2z^2 + 3z + 5 = 0$

Elle a pour discriminant $\Delta = 3^2 - 4 \times 2 \times 5 = 9 - 40 = -31$

L'équation a donc deux solutions complexes conjuguées :

$z_1 = \frac{-3 + i\sqrt{31}}{4}$ et $z_2 = \frac{-3 - i\sqrt{31}}{4}$

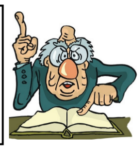
on peut factoriser $2z^2 + 3z + 5$ ainsi :

$$2z^2 + 3z + 5 = 2\left(z - \frac{-3 + i\sqrt{31}}{4}\right)\left(z - \frac{-3 - i\sqrt{31}}{4}\right)$$
$$= 2\left(z + \frac{3}{4} - i\frac{\sqrt{31}}{4}\right)\left(z + \frac{3}{4} + i\frac{\sqrt{31}}{4}\right)$$

<u>V) Représentation géométrique d'un nombre complexe :</u>

Le plan est muni d'un repère **orthonormé direct** $(O\,;\,\vec{u}\,,\,\vec{v})$

"direct" signifie que $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{2}$

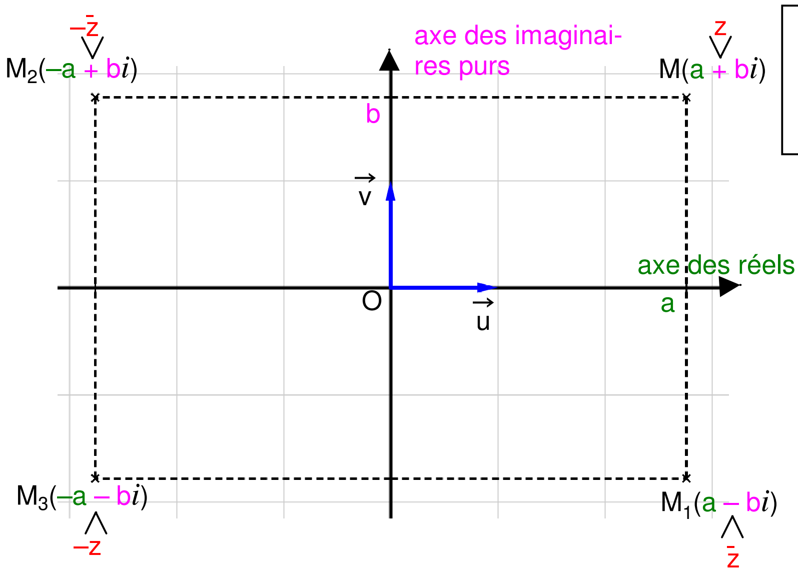


a) affixe d'un point :

définition : Soient a et b deux nombres réels.

▶ à tout nombre complexe $z = a + bi$, on associe le point M de coordonnées (a ; b).
M est l'image de z. On le note M(z)

▶ à tout point M du plan de coordonnées (a ; b), on associe le complexe $z = a + bi$.
z est appelé l'affixe de M, on le note z_M.



Le plan muni d'un repère orthonormé direct dans lequel on représente des nombres complexes est appelé plan complexe !

▶"M(z) est sur l'axe des réels" équivaut à "Im(z)=0"

▶"M(z) est sur l'axe des imaginaires purs" équivaut à "Re(z)=0"

▶M(z) et $M_1(\bar{z})$ sont symétriques par rapport à l'axe des réels

▶M(z) et $M_2(-z)$ sont symétriques par rapport à O

b) affixe d'un vecteur :

définition : Soient a et b deux nombres réels.

▶ à tout nombre complexe $z = a + bi$, on associe le vecteur $\vec{w}$ de coordonnées (a ; b).

▶ à tout vecteur $\vec{w}$ du plan de coordonnées (a ; b), on associe le nombre complexe $z = a + bi$. z est appelé l'affixe de $\vec{w}$, on le note $z_{\vec{w}}$.

propriétés (déduites des propriétés sur les coordonnées des vecteurs) :

▶ deux vecteurs sont égaux si et seulement si leurs affixes sont égales

$$\vec{w} = \vec{s} \text{ équivaut à } z_{\vec{w}} = z_{\vec{s}}$$

▶ soient deux vecteurs $\vec{w}$ et $\vec{w}'$ d'affixes respectives z et z' et un réel k

- l'affixe de $\vec{w} + \vec{w}'$ est $z + z'$
- l'affixe de $k\vec{w}$ est kz

$z_{\vec{w}+\vec{w}'} = z_{\vec{w}} + z_{\vec{w}'}$

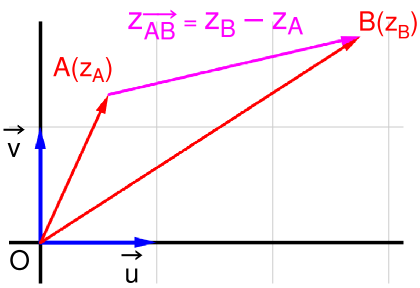
$z_{k\vec{w}} = kz_{\vec{w}}$

▶ l'affixe du milieu I du segment [AB] est $z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2}$

propriété :

Soient deux points A et B d'affixes respectives z_A et z_B

L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$



► ***démonstration***

Soient deux points A et B d'affixes respectives $z_A = x + yi$ et $z_B = x' + y'i$
(x, x', y, y' sont des réels)
Les coordonnées de A et B sont respectivement (x ; y) et (x' ; y')
Donc le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées ($x' - x$; y' – y).
Par suite et selon la définition,
l'affixe de $\overrightarrow{AB}$ est $(x' - x) + (y' - y)i = (x' + y'i) - (x + yi) = z_B - z_A$

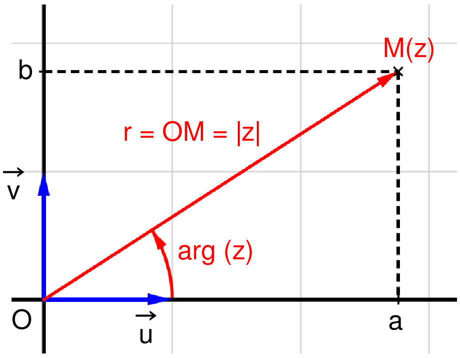
<u>Ex :</u> Soient deux points A et B d'affixes respectives $z_A = 3 + i$ et $z_B = -5 + 2i$
Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_{\overrightarrow{AB}} = -5 + 2i - (3 + i) = -8 + i$
Le milieu I de [AB] a pour affixe $z_I = \dfrac{(3 + i) + (-5 + 2i)}{2} = -1 + \dfrac{3}{2}i$

<u>VI) Arguments, formes trigonométriques :</u>

a) <u>argument d'un nombre complexe non nul :</u>

► les arguments sont définis en radians à 2π près !
► 0 n'a pas d'argument !
► Soit θ une mesure de $(\vec{u} ; \overrightarrow{OM})$
$\arg(z) = \theta + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)
$= \theta$ (mod 2π). On notera plus simplement $\arg(z) = \theta$.

<u>définition</u> :
Soit un point M d'affixe non nulle $z = a + bi$ (a et b deux réels).
On appelle argument de z, une mesure de l'angle $(\vec{u} ; \overrightarrow{OM})$
L' argument de z est noté arg (z).



<u>remarque</u> : Par définition,
$OM = \sqrt{(a - 0)^2 + (b - 0)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$

Le module de z, |z|, est égal à la distance OM.
On notera r la distance OM.

le point M peut aussi être caractérisé en utilisant ses coordonnés polaires (r ; arg(z)) !

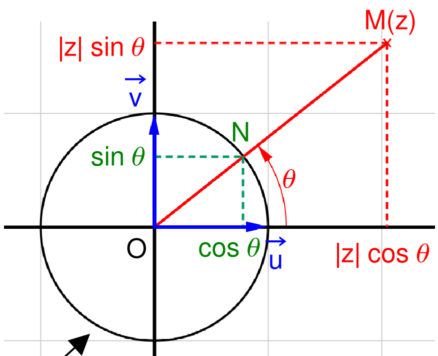
b) <u>forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul :</u>

approche :

Soit un point M d'affixe non nul z et d'argument θ

Soit N le point du cercle trigonométrique tel que $\overrightarrow{ON} = \dfrac{\overrightarrow{OM}}{|z|}$

On a donc $z_N = \cos\theta + \sin\theta i$
Or, $\overrightarrow{OM} = |z|\overrightarrow{ON}$ donc $z_{\overrightarrow{OM}} = |z| z_{\overrightarrow{ON}}$
Par suite $z = |z| (\cos\theta + \sin\theta i)$



cercle trigonométrique de rayon 1 !

définition : Tout nombre complexe non nul z s'écrit sous la forme :

$$z = r(\cos\theta + \sin\theta\, i) \text{ avec } r = |z| \text{ et } \theta = \arg(z)$$

Cette forme est appelée forme trigonométrique de z.

remarques :

▶ deux nombres complexes non nuls sont égaux si, et seulement si, ils ont même module et même argument

Soient $z = r(\cos\theta + \sin\theta\, i)$ et $z' = r'(\cos\theta' + \sin\theta'\, i)$

$$z = z' \text{ équivaut à } r = r' \text{ et } \theta = \theta' \pmod{2\pi}$$

▶ Soit le nombre complexe non nul $z = a + bi$ (avec a et b des réels)

Soit la forme trigonométrique de $z = r(\cos\theta + \sin\theta\, i)$

- $a = r\cos\theta$ et $b = r\sin\theta$
- $\cos\theta = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\sin\theta = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$r = |z| = \sqrt{a^2+b^2}$!

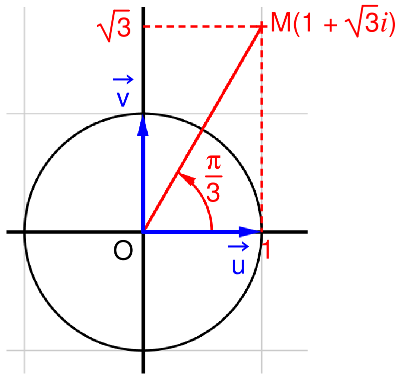
Ex :

▶ Soit le nombre complexe $z = 1 + \sqrt{3}i$

On a $r = \sqrt{1+3} = 2$, $\cos\theta = \dfrac{1}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Par suite $\theta = \dfrac{\pi}{3} \pmod{2\pi}$

Donc $z = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$



▶ Soit le nombre complexe $z = 5\left(\cos\dfrac{3\pi}{4} + i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)$

donc $z = 5\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right) = -\dfrac{5\sqrt{2}}{2} + \dfrac{5\sqrt{2}}{2}i$

propriétés : Soient deux nombres complexes z et z' non nuls

1▶ $\arg(\bar{z}) = -\arg(z)\ [2\pi]$

2▶ $\arg(-z) = \arg(z) + \pi\ [2\pi]$

3▶ $\arg(z'z) = \arg(z) + \arg(z')\ [2\pi]$

4▶ $\arg(z^n) = n\arg(z)\ [2\pi]$

5▶ $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')\ [2\pi]$

▶ ***démonstrations***

1▶ Soit le nombre complexe non nul $z = a + bi$ avec a et b deux réels.

On a $\bar{z} = a - bi$. Posons $\arg(z) = \theta$ et $\arg(\bar{z}) = \theta'$.

On a $\cos\theta' = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+(-b)^2}}$ et $\sin\theta' = \dfrac{-b}{\sqrt{a^2+(-b)^2}}$

Donc $\cos\theta' = \cos\theta$ et $\sin\theta' = -\sin\theta$

Donc $\theta' = -\theta \pmod{2\pi}$ Par suite, $\arg(\bar{z}) = -\arg(z) \pmod{2\pi}$

2▶ Soit le nombre complexe non nul $z = a + bi$ avec a et b deux réels.

On a $-z = -a - bi$. Posons $\arg(z) = \theta$ et $\arg(-z) = \theta'$.

On a $\cos\theta' = \dfrac{-a}{\sqrt{(-a)^2+(-b)^2}}$ et $\sin\theta' = \dfrac{-b}{\sqrt{(-a)^2+(-b)^2}}$

donc $\cos\theta' = -\cos\theta$ et $\sin\theta' = -\sin\theta$

Donc $\theta' = \theta + \pi \pmod{2\pi}$ Par suite, $\arg(-z) = \arg(z) + \pi \pmod{2\pi}$

3▶ Soient les nombres complexes non nuls $z = a + bi$ et $z' = a' + b'i$ avec a, b, a', b' des réels. Posons $\arg(z) = \theta$, $\arg(z') = \theta'$ et $\arg(zz') = \theta''$

On a $zz' = (a + bi)(a' + b'i) = aa' - bb' + (ab' + a'b)i$

Donc, $\cos\theta'' = \dfrac{aa' - bb'}{|zz'|}$ et $\sin\theta'' = \dfrac{ab' + a'b}{|zz'|}$.

par définition de l'argument !

Or, $a = |z|\cos\theta$, $b = |z|\sin\theta$, $a' = |z'|\cos\theta'$, $b' = |z'|\sin\theta'$

Par suite, $\cos\theta'' = \dfrac{|z|\cos\theta|z'|\cos\theta' - |z|\sin\theta|z'|\sin\theta'}{|zz'|}$.

Or, $|zz'| = |z||z'|$ donc $\cos\theta'' = \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' = \cos(\theta + \theta')$.

De la même façon, on montre que $\sin\theta'' = \sin(\theta + \theta')$

Il en résulte que $\theta'' = \theta + \theta' \pmod{2\pi}$ donc $\arg zz' = \arg z + \arg z' \pmod{2\pi}$

4▶ Démontrons par récurrence que la propriété P_n: $\arg(z^n) = n\arg z \pmod{2\pi}$» est vraie pour $n\in\mathbb{N}^*$

Initialisation : Pour n=1, $\arg(z^1) = \arg z = 1 \times \arg z$ donc la propriété P_1 est vraie.

Hérédité : Soit n un entier naturel quelconque fixé ($n \neq 0$).

Supposons que P_n est vraie (hypothèse de récurrence). Montrons que P_{n+1} est vraie.

On a $\arg(z^{n+1}) = \arg(z^n \times z)$.

Or, d'après la propriété 3, $\arg(z^n \times z) = \arg(z^n) + \arg(z)$

Par suite, $\arg(z^{n+1}) = \arg(z^n) + \arg(z)$

D'après l' hypothèse de récurrence, $\arg(z^n) = n\arg(z)$;

Donc $\arg(z^{n+1}) = n\arg(z) + \arg(z) = (n + 1)\arg(z)$

Il en résulte que la propriété P_{n+1} est vraie.

Conclusion : La propriété P_n étant vraie au rang 1 et étant héréditaire, elle est vraie pour tout entier naturel n appartenant à $\mathbb{N}^*$.

5▶ Soient deux nombres complexes non nuls z et z'

On pose $Z = \dfrac{z}{z'}$ donc $z = Zz'$. D'après la propriété 3, $\arg(z) = \arg(Z) + \arg(z')$.

Par suite, $\arg(Z) = \arg(z) - \arg(z')$ Il en résulte que $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') \pmod{2\pi}$

VII) Notation exponentielle :

approche :

Considérons un nombre complexe z de module 1 tel que $z = \cos\theta + i\sin\theta$ avec $\theta = \arg(z) \pmod{2\pi}$.

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ qui associe à chaque réel le nombre complexe $f(\theta) = \cos\theta + i\sin\theta$

On a :

▶ $f(\theta) \times f(\theta') = (\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta' + i\sin\theta')$

$= \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' + i(\cos\theta\sin\theta' + \sin\theta\cos\theta')$

Or, $\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' = \cos(\theta + \theta')$ et $\cos\theta\sin\theta' + \sin\theta\cos\theta' = \cos(\theta + \theta')$

Donc $f(\theta) \times f(\theta') = f(\theta) + f(\theta')$

▶ $f(0) = \cos 0 + i\sin 0 = 1 + 0 = 1$

Comme la fonction exponentielle, f transforme les produits en sommes et $f(0) = 1$!

Au 18ème siècle, le mathématicien Leonhard Euler a l'idée d' adopter une notation exponentielle pour f et pose $f(\theta) = \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$

définition : Tout nombre complexe non nul z de module r et d'argument θ s'écrit sous la forme :

$$z = r(\cos\theta + \sin\theta i) = re^{i\theta} \text{ avec } r = |z| \text{ et } \theta = \arg(z) \pmod{2\pi}$$

Cette forme est appelée forme exponentielle de z.

Ex :

▶ $z = -1 = \cos\pi + i\sin\pi = e^{i\pi}$

▶ $z_1 = 1 + \sqrt{3}i = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$

▶ $z_2 = i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = e^{i\frac{\pi}{2}}$

propriétés (déduites des propriétés établies sur les modules et arguments) :

Soient r et r' deux réels strictement positifs, soient θ et θ' deux réels et soit n un entier naturel.

Soient $z = re^{i\theta}$ et $z' = r'e^{i\theta'}$

▶ $zz' = rr'\, e^{i(\theta+\theta')}$ ▶ $z^n = r^n\, e^{in\theta}$ ▶ $\frac{1}{z} = \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{e^{-i\theta}}{r}$ ▶ $\frac{z}{z'} = \frac{re^{i\theta}}{r'e^{i\theta'}} = \frac{r}{r'}\, e^{i(\theta-\theta')}$

en particulier, si r = 1, on a $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$
Cette égalité est la formule de Moivre

Ce qui précède permet de mémoriser les formules d'addition et de duplication établies en Première.
Par exemple, retrouvons les formules d'addition. Soient $z = e^{i\theta}$ et $z' = e^{i\theta'}$.
On a $zz' = e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = (\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta' + i\sin\theta') = \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' + i(\cos\theta\sin\theta' + \sin\theta\cos\theta')$
On a également, $zz' = e^{i(\theta+\theta')} = \cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta')$
D'où, $\cos(\theta+\theta') = \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta'$ et $\sin(\theta+\theta') = \cos\theta\sin\theta' + \sin\theta\cos\theta'$

propriétés :

Soient deux points A et B d'affixes respectives z_A et z_B dans un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

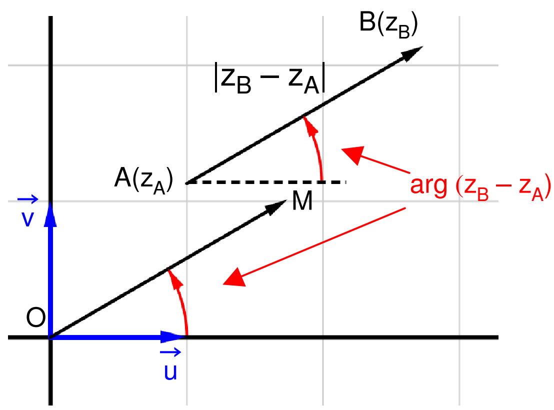
1▶ $AB = |z_B - z_A|$

2▶ $(\vec{u}, \overrightarrow{AB}) = \arg(z_B - z_A)$

▶ ***démonstrations***

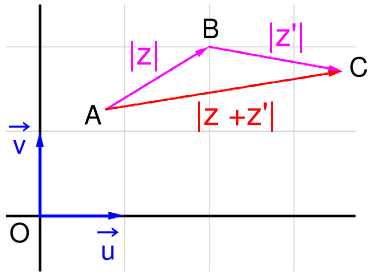
1▶ Il existe un unique point M tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$
Or, $z_{\overrightarrow{OM}} = z_M - 0 = z_M$ et $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$ donc $z_M = z_B - z_A$. Par suite, $|z_M| = |z_B - z_A|$
Comme $|z_M| = OM$ et $OM = AB$ donc $AB = |z_B - z_A|$

2▶ Il existe un unique point M tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$ d'où $z_M = z_B - z_A$ et $(\vec{u}, \overrightarrow{OM}) = (\vec{u}, \overrightarrow{AB})$
Or, $(\vec{u}, \overrightarrow{OM}) = \arg(z_M)$,
Par suite, $(\vec{u}, \overrightarrow{AB}) = \arg(z_M) = \arg(z_B - z_A) \pmod{2\pi}$.



retour sur l'inégalité triangulaire établie au paragraphe 3 !
Soient trois points A, B, C d'affixes respectives z_A, z_B et z_C
Posons $z_{\overrightarrow{AB}} = z$ et $z_{\overrightarrow{BC}} = z'$. On a donc $z_{\overrightarrow{AC}} = z + z'$
$AB = |z|$ $BC = |z'|$ $AC = |z + z'|$

$|z + z'| \leqslant |z| + |z'|$



remarque :

Dans le plan complexe muni d' un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$, soient A(a), B(b), C(c), D(d) des points distincts deux à deux.
On a :

$$\frac{CD}{AB} = \frac{|d - c|}{|b - a|} = \left|\frac{d - c}{b - a}\right|$$

et

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = (\vec{u}, \overrightarrow{CD}) - (\vec{u}, \overrightarrow{AB}) = \arg(d - c) - \arg(b - a) = \arg\left(\frac{d - c}{b - a}\right)$$

très utile pour étudier des configurations géométriques !!