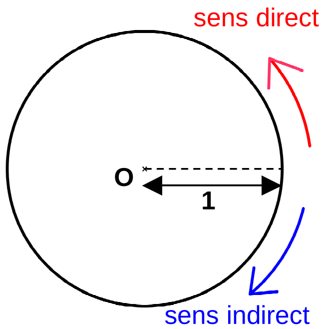
Trigonométrie

I) Radian et cercle trigonométrique:

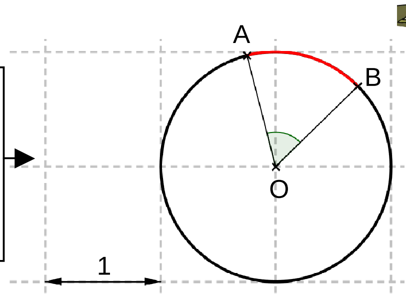


définition (rappel) : Un cercle trigonométrique est **un cercle** $\mathscr{C}$ **de rayon 1** sur lequel on distingue **deux sens de parcours** : **le sens direct** (sens inverse des aiguilles d'une montre et le **sens indirect** (sens des aiguilles d'une montre).

La longueur du cercle est 2π, celle du demi-cercle est π, celle du quart de cercle est $\frac{\pi}{2}$

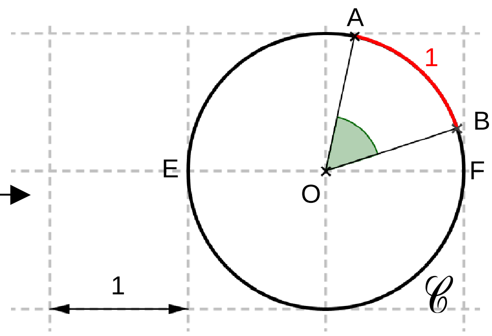
le "sens direct" est le sens contraire à celui des aiguilles d'une montre. On dit également "sens trigonométrique"

Nous allons définir une nouvelle unité de mesure d'angles !
Soient deux points A et B d'un cercle trigonométrique de centre O.
On considère que la mesure de l'angle géométrique $\widehat{AOB}$ a pour mesure la longueur de $\overset{\frown}{AB}$.
Cette nouvelle unité de mesure est le radian. On le note rad.



définition : Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre O et de rayon 1.
Un angle de 1 radian est un angle au centre interceptant sur $\mathscr{C}$ un arc de longueur 1.

$\widehat{AOB} = 1$ rad



conséquence :
- Sur la figure précédente, $\overset{\frown}{EF}$ a pour longueur π donc π radians correspond à 180°
Les mesures en radians sont propositionnelles aux mesures en degrés.
On peut dresser un tableau de proportionnalité

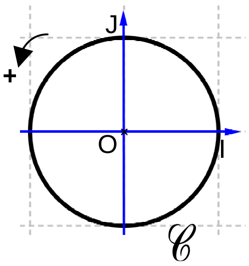
mesure en degrés	30°	45°	60°	90°	180°
mesure en radians	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π

mesure en radians = mesure en degrés x $\frac{\pi}{180}$

Ex : La mesure en radians d'un angle de 15° est 15 x $\frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{12}$ rad

II) Repérage sur le cercle trigonométrique:

Soit $\mathscr{C}$ le cercle trigonométrique de centre O et (O, I, J) un repère orthonormé <u>direct</u> du plan.



Le repère du plan (O, I, J) est **direct** si le trajet le plus court pour aller de I à J est obtenu en utilisant **le sens direct** sur le cercle $\mathscr{C}$.

Soit le point H de coordonnées (1;1). On munit la droite (IH) du repère (I;H).

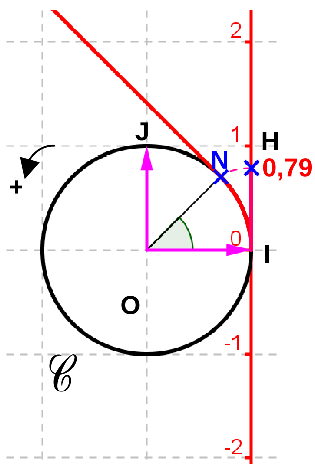
On a donc une **droite graduée recouvrant tous les réels** ! (IH) est une **droite numérique**

a) enroulement de la droite numérique sur un cercle :

On "enroule" la droite (IH) sur le cercle $\mathscr{C}$. Tout nombre réel x vient s'appliquer sur un point M unique. On dit que M est l'image de x sur le cercle $\mathscr{C}$.

<u>Ex</u> :

Dans la situation représentée ci-contre, N est l'image de 0,79 sur le cercle $\mathscr{C}$



<u>remarques :</u>

► Dans notre exemple, d'après la définition du paragraphe précédent, l'angle $\widehat{ION}$ a pour mesure 0,79 rad.

► Nous allons à présent graduer la droite numérique en écrivant les abscisses des points de la droite numérique à l'aide du nombre π.

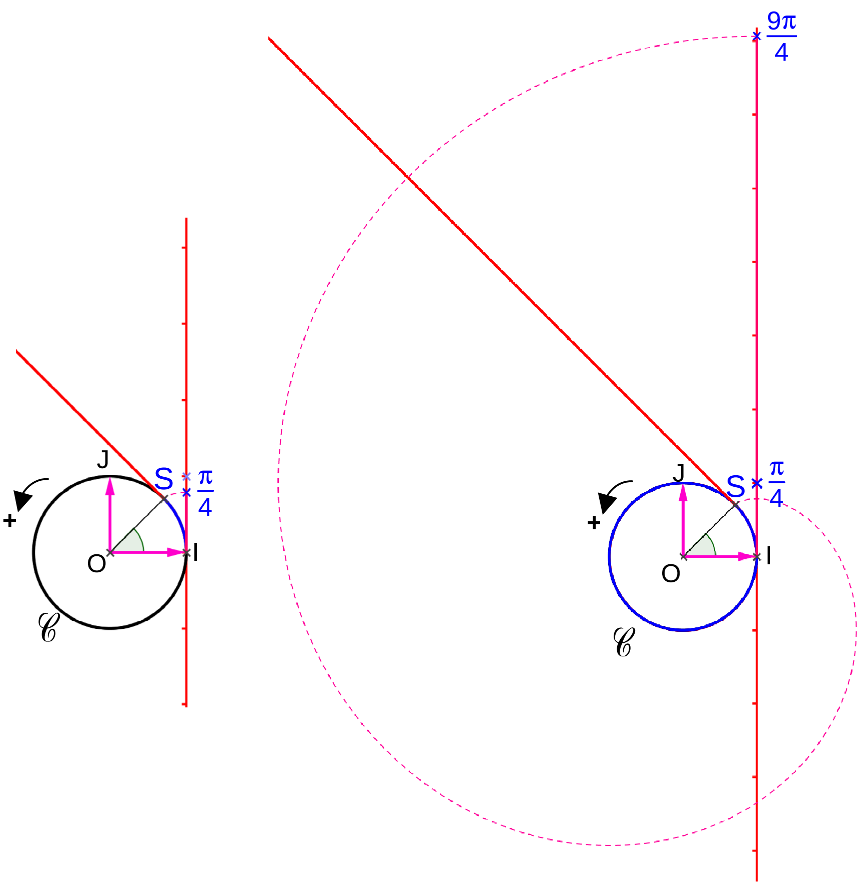
b) un point du cercle trigonométrique est l'image d'une infinité de réels :

propriété :
Tout point M de $\mathscr{C}$ est l'image d'une infinité de réels.
Soit x l'un de ses réels, les autres sont les réels x + k x 2π où k est un entier relatif.

► **illustration**

Dans l'exemple ci-contre, S est l'image du réel $\frac{\pi}{4}$ mais également de $\frac{9\pi}{4}$.

L'enroulement de la droite numérique entre $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{9\pi}{4}$ correspond à un tour complet.
On se retrouve donc au même point du cercle.



En effet, on a $\frac{9\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2\pi$
or, la longueur du cercle trigonométrique est 2π.

le rayon de $\mathscr{C}$ est 1 !

On pourrait reproduire l'enroulement à partir de S avec n'importe quel nombre entier de tours (dans le sens direct comme dans le sens indirect).
On retomberait toujours sur le même point.

Dans notre exemple, S est aussi l'image du nombre réel $-\frac{23\pi}{4}$ puisque

$-\frac{23\pi}{4} = \frac{\pi}{4} - 3 \times 2\pi$

On a fait 3 tours complets (3 x 2π) dans le sens indirect (négatif) à partir du point-image de $\frac{\pi}{4}$

Plus généralement, deux réels x et x' auront le même point-image si et seulement si l'enroulement de la droite numérique entre x et x' correspond à un nombre entier de tours.

III) Angle orienté de vecteurs non nuls :

Nous n'avons encore pas les outils pour donner une définition rigoureuse d'un angle orienté !

a) une **approche** de la définition par la mesure d'un angle orienté :

définition :
Soit (O, I, J) un repère orthonormé direct du plan. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.
Soient A et B deux points tels que $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$.
Soient A' et B' les points d'intersection de [OA) et [OB) avec le cercle trigonométrique $\mathscr{C}$ de centre O.

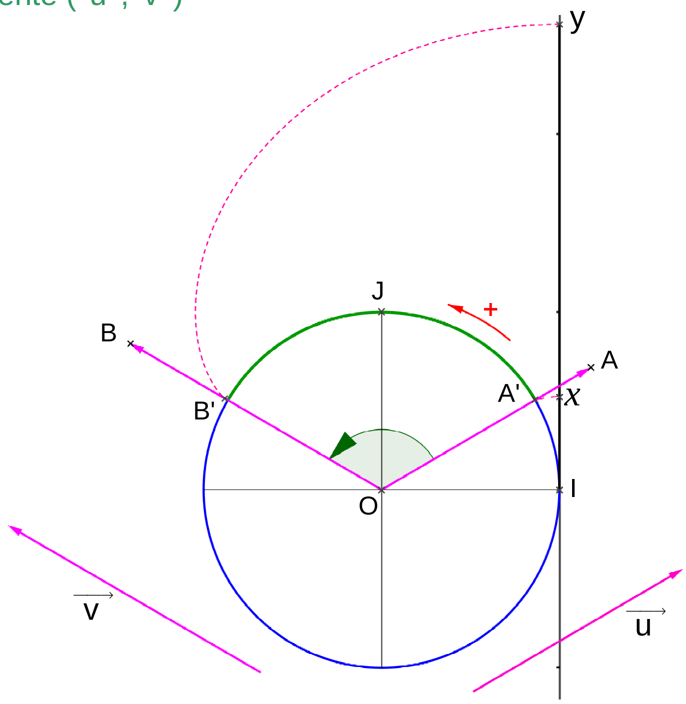
Si A' est l'image du réel x et B' l'image du réel y sur $\mathscr{C}$,
y – x est **une** mesure en radians de l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$

Pourquoi **une** mesure ?

Un point du cercle trigonométrique est l'image d'une infinité de réels (suivant le nombre de tours entiers effectués pendant l'enroulement de la droite numérique !).

donc, si on enlève (ou on ajoute) une ou plusieurs fois 2π à **y – x**, on obtient également une mesure de l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$ en radians !

Chacun des nombres de la forme $(y – x) + 2k\pi$ où k est un entier relatif est une mesure de l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$!!



Ex : Dans l'exemple ci-contre,

$(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = \frac{4\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$

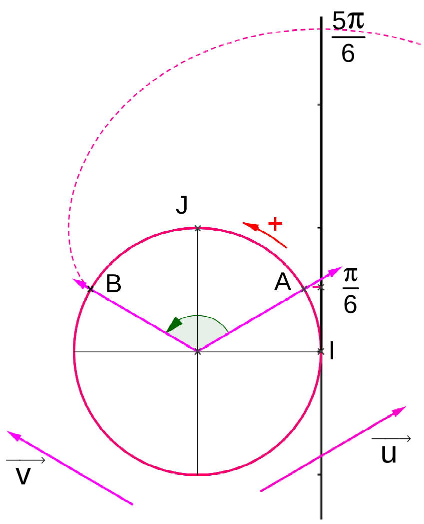
On pourrait également écrire,

$(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{2\pi}{3} + 3 \times 2\pi = \frac{2\pi}{3} + \frac{18\pi}{3} = \frac{20\pi}{3}$

ou

$(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{2\pi}{3} - 5 \times 2\pi = \frac{2\pi}{3} - \frac{30\pi}{3} = \frac{-28\pi}{3}$

Plus généralement, $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{2\pi}{3} + k \times 2\pi$ (avec $k \in \mathbb{Z}$)



b) <u>mesure principale d'un angle orienté de vecteurs :</u>

<u>propriété et définition</u> :
Parmi toutes les mesures de l'angle orienté ($\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$) de deux vecteurs non nuls, il en existe une et une seule α dans l'intervalle $]-\pi\ ;\ \pi]$. On l'appelle la mesure principale de l'angle orienté ($\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$).

<u>remarque</u> : la mesure en radians de l'angle géométrique associé a pour mesure $|\alpha|$

<u>Ex :</u>

Dans l'exemple précédent, la mesure principale de ($\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$) est égale à $\frac{2\pi}{3}$ $\left(-\pi < \frac{2\pi}{3} \leqslant \pi\right)$

La mesure de l'angle géométrique $\widehat{AOB}$ est égale à $\left|\frac{2\pi}{3}\right| = \frac{2\pi}{3}$

<u>comment trouver la mesure principale d'un angle ?</u>
Il s'agit de retrancher le plus grand nombre de fois possibles 2π jusqu'à ce que le nombre obtenu soit dans l'intervalle $]-\pi\ ;\ \pi]$

► <u>exemple 1</u> : $\frac{30\pi}{7}$

- on effectue la division euclidienne de 30 par 7 ⟶ $\begin{array}{r|l} 30 & 7 \\ \hline 2 & 4 \end{array}$

Donc, $\frac{30\pi}{7} = \frac{2\pi}{7} + 4\pi = \frac{2\pi}{7} + 2 \times 2\pi = \frac{2\pi}{7}$ La mesure principale est $\frac{2\pi}{7}$

► <u>exemple 2</u> : $\frac{53\pi}{9}$

- on effectue la division euclidienne de 53 par 9 ⟶ $\begin{array}{r|l} 53 & 9 \\ \hline 8 & 5 \end{array}$

Donc, $\frac{53\pi}{9} = \frac{8\pi}{9} + 5\pi = \frac{8\pi}{9} - \pi + 6\pi = -\frac{\pi}{9} + 3 \times 2\pi$ La mesure principale est $-\frac{\pi}{9}$

Je décompose 5π pour obtenir une somme de deux termes dont l'un est un multiple de 2π. 2 solutions intéressantes sont possibles ($4\pi + \pi$ ou $-\pi + 6\pi$). Je choisis celle me permettant d'obtenir une mesure comprise dans l'intervalle $]-\pi\ ;\ \pi]$!!

III) Propriétés des angles orientés :

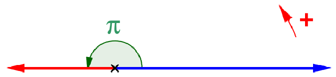
> cette propriété pourra être utile pour démontrer que deux droites sont parallèles !

propriété :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.

▶ $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de même sens si et seulement si $(\vec{u}, \vec{v}) = 0$

▶ $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de sens contraire si et seulement si $(\vec{u}, \vec{v}) = \pi$



propriété admise (relation de Chasles) :

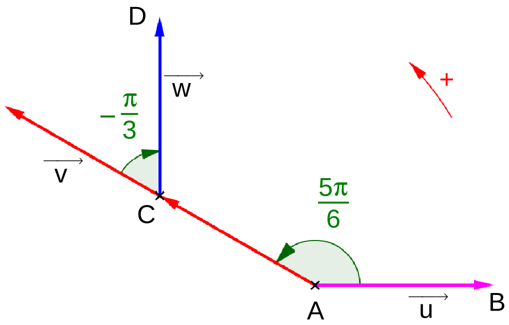
Pour tous vecteurs non nuls $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$: $(\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{w})$

Ex :Sur l'exemple ci-contre,

$$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}) = (\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CD})$$

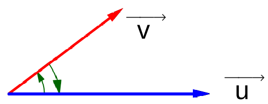
$$= \frac{5\pi}{6} + (\overrightarrow{AC}, \vec{v}) + (\vec{v},\overrightarrow{CD})$$

$$= \frac{5\pi}{6} + 0 - \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$$



propriétés : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.

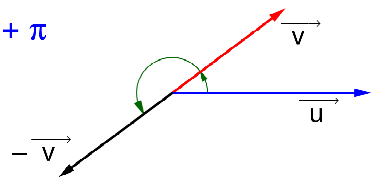
▶ $(\vec{u}, \vec{v}) = -(\vec{v}, \vec{u})$



démonstration

D'après la relation de Chasles,
$(\vec{u}, \vec{u}) = (\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{u})$;
or, $(\vec{u}, \vec{u}) = 0$
donc $(\vec{u}, \vec{v}) = -(\vec{v}, \vec{u})$

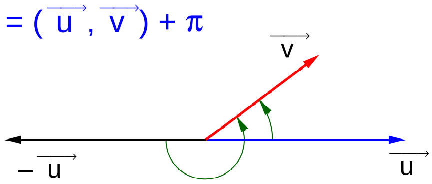
▶ $(\vec{u}, -\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + \pi$



démonstration

D'après la relation de Chasles,
$(\vec{u}, -\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, -\vec{v})$;
or, $(\vec{v}, -\vec{v}) = \pi$
donc $(\vec{u}, -\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + \pi$

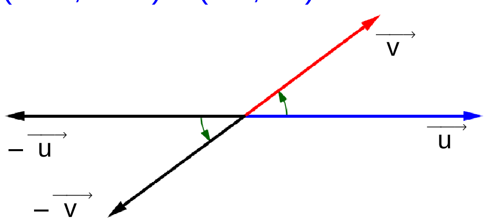
▶ $(-\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + \pi$



démonstration

D'après la relation de Chasles,
$(-\vec{u}, \vec{v}) = (-\vec{u}, \vec{u}) + (\vec{u}, \vec{v})$
or, $(-\vec{u}, \vec{u}) = \pi$
donc $(-\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + \pi$

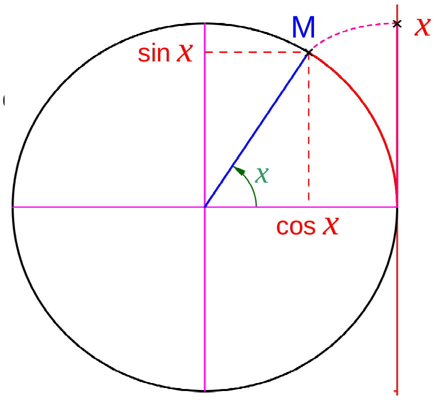
▶ $(-\vec{u}, -\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v})$



démonstration

D'après la relation de Chasles,
$(-\vec{u}, -\vec{v}) = (-\vec{u}, \vec{u}) + (\vec{u}, -\vec{v})$
or, $(-\vec{u}, \vec{u}) = \pi$ et $(\vec{u}, -\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + \pi$
donc $(-\vec{u}, -\vec{v}) = \pi + (\vec{u}, \vec{v}) + \pi$
donc $(-\vec{u}, -\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + 2\pi = (\vec{u}, \vec{v})$

IV) cosinus et sinus d'un réel - cosinus et sinus d'un angle orienté :



définition :

Soit $\mathscr{C}$ le cercle trigonométrique de centre O et (O, I, J) un repère plan.

Soit M l'image d'un réel x sur le cercle trigonométrique $\mathscr{C}$.

Le cosinus de x, noté cos x est l'abscisse de M

Le sinus de x, noté sin x est l'ordonnée de M

propriétés (rappel) :

Pour tout nombre réel x,

▶ $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$ ▶ $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$ ▶ $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

propriété :

Pour tout nombre réel x, pour tout entier relatif k,

▶ $\cos(x + 2k\pi) = \cos(x)$ ▶ $\sin(x + 2k\pi) = \sin(x)$

valeurs particulières à retenir :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
cos x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
sin x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

définition : Le cosinus et le sinus d'un angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$ sont le cosinus et le sinus d'une quelconque de ses mesures. On les note $\cos(\vec{u}, \vec{v})$ et $\sin(\vec{u}, \vec{v})$

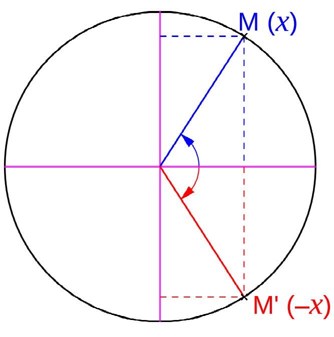
V) Cosinus et sinus d'angles associés :

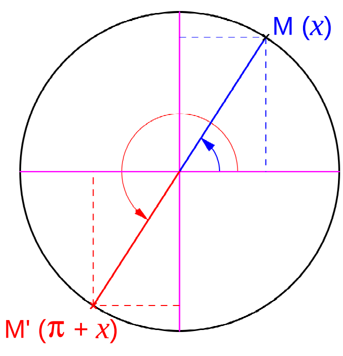
définition : Les angles associés à un angle orienté de mesure x en radians sont les angles dont une mesure est $-x$; $\pi - x$; $\pi + x$; $\frac{\pi}{2} + x$; $\frac{\pi}{2} - x$

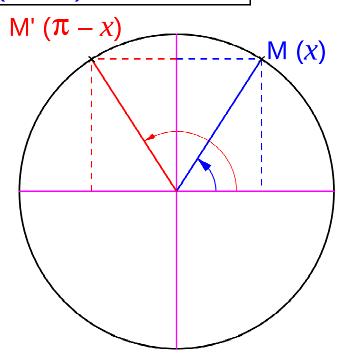
propriétés :

Pour tout nombre réel x,

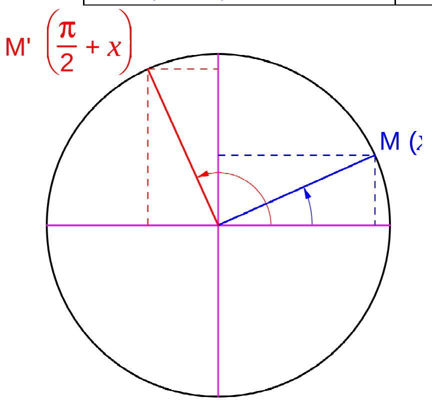
$\cos(-x) = \cos x$	$\cos(\pi + x) = -\cos x$	$\cos(\pi - x) = -\cos x$
$\sin(-x) = -\sin x$	$\sin(\pi + x) = -\sin x$	$\sin(\pi - x) = \sin x$

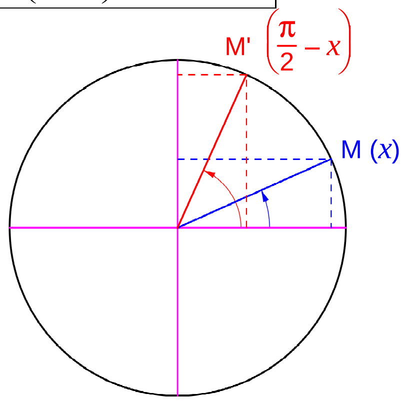






$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$
$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sin x$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$



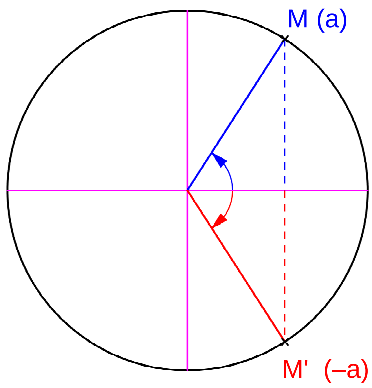


VI) Équations trigonométriques:

propriétés :

▶ L'équation $\cos x = \cos a$ a pour solutions les nombres réels :

$x = a + 2k\pi$ (avec $k \in \mathbb{Z}$) et $x = -a + 2k\pi$ (avec $k \in \mathbb{Z}$)

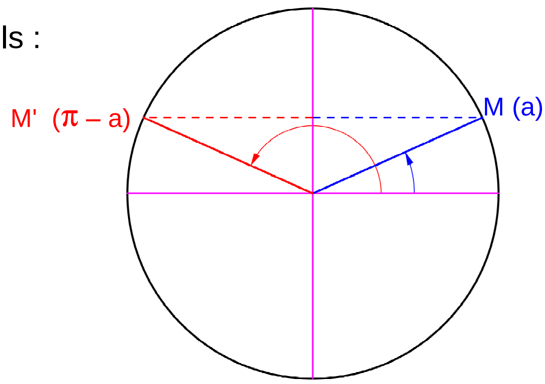


Ex : Résolvez dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos x = \cos \frac{5\pi}{6}$

$$\begin{cases} x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \\ x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} \quad (\text{avec } k \in \mathbb{Z})$$

▶ L'équation $\sin x = \sin a$ a pour solutions les nombres réels :

$x = a + 2k\pi$ (avec $k \in \mathbb{Z}$) et $x = \pi - a + 2k\pi$ (avec $k \in \mathbb{Z}$)



Ex : Résolvez dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sin x = \sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$

$$\begin{cases} x = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \\ x = \pi - \left(-\frac{3\pi}{4}\right) + 2k\pi = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} \quad (\text{avec } k \in \mathbb{Z})$$